をみたす $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在するとき,

$f$ は $(a,b)$ で **全微分可能** または単に **微分可能** である という。

(スモールオー) → 教 p.38

ここで, $o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$ は ランダウの $o$, すなわち

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-\alpha(x-a)-\beta(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0 \quad (\star\star)$$

を意味する。 ▨

($\star$) の意味.

$$f(x,y) = \underline{f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b)} + o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$$

$(x,y)\to(a,b)$ のとき, $f(x,y)$ は $x$ と $y$ の1次関数で近似される.

$z=f(x,y)$ で定まる曲面の $(a,b)$ における接平面.

10/23

**定理 4.6** $f(x,y)$ が $(a,b)$ で全微分可能

$\Rightarrow$ (1) $f$ は $(a,b)$ で連続.

(2) $f$ は $(a,b)$ で $x, y$ に関して偏微分可能.

(3) 上の式($\star$)において (全微分の定義)

$\alpha = f_x(a,b)$, $\beta = f_y(a,b)$ .

*Proof* (1) 式 ($\star$), ($\star\star$) より

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

これは $(x,y)$ の $(a,b)$ への近づき方によらないことに注意.

(2)(3) 式 ($\star\star$) において $y=b$ とおくと

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}-\alpha\right|$$

$$= \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} - \alpha \right| = 0.$$

$\uparrow$
($h = x - a$ とおいた)

これは、$f(x, y)$ が $(a, b)$ において $x$ で偏微分可能であり、かつ $\alpha = f_x(a, b)$ であることを表す。

$y$ についても同様で、$\beta = f_y(a, b)$ が示される。 $\blacksquare$

**例題** (全微分可能性の判定)

与えられた $f(x, y)$ が $(a, b)$ で全微分可能か?

(1) $f$ は $(a, b)$ で連続でない
$x, y$ に関して偏微分可能でない
$\} \longrightarrow$ $f$ は $(a, b)$ で全微分可能でない。

(2) 全微分の定義より、

$$\lim_{h \to 0, k \to 0} \frac{\varepsilon(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{h \to 0, k \to 0} \left\{ f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) k \right\} \times \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

が $0$ に収束するかどうかで判定する。

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ は原点 $(0, 0)$ で全微分可能か?
(演 p. 96, 例題 3.1)

$f(0, 0) = 1$, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. より

$$\lim_{h \to 0, k \to 0} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \left\{ f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0) h - f_y(0, 0) k \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0, k \to 0} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \left( \sqrt{1 - h^2 - k^2} - 1 \right).$$

ここで、$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により極座標に変換する。
$h \to 0$, $k \to 0$ のとき $r \to 0$. ゆえに

$$\lim_{h\to 0, k\to 0} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \left(\sqrt{1-h^2-k^2}-1\right) = \lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{1-r^2}-1}{r}.$$

$\dfrac{\sqrt{1-r^2}-1}{r}$ の分子を有理化すると

$$\frac{\sqrt{1-r^2}-1}{r} = \frac{(\sqrt{1-r^2}-1)(\sqrt{1-r^2}+1)}{r(\sqrt{1-r^2}+1)} = \frac{1-r^2-1}{r(\sqrt{1-r^2}+1)}$$

$$= \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}+1}.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{1-r^2}-1}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}+1} = 0.$

よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で全微分可能. ☒

<u>定理 4.7</u> $f(x, y)$ が $(a, b)$ のある近傍 $U$ において
- $x, y$ に関して偏微分可能
- $f_x, f_y$ が連続

$\Rightarrow$ $f(x, y)$ は $(a, b)$ において全微分可能.

Proof. $(a+h, b+k) \in U$ をみたす $h, k$ に対して

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + o(\sqrt{h^2+k^2})$$
$$((h, k) \to (0, 0))$$

を示せばよい.

$f(a+h, b+k) - f(a, b)$

$$= \underbrace{\{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)\}}_{①} + \underbrace{\{f(a, b+k) - f(a, b)\}}_{②}$$

② $y$ に関する偏微分可能性より

$$f(a, b+k) - f(a, b) = k \cdot f_y(a, b) + o(k) \quad (k \to 0).$$

① 平均値の定理により, ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h, b+k) \cdot h.$$

NO. 20

DATE 9・27・2015

$\frac{\partial f}{\partial x}$ の連続性より $\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h, b+k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + o(1)$

$((h,k) \to (0,0))$.

よって $f(a+h, b+k) - f(a,b)$

$= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + o(1) \right\} h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + o(k)$

$= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + o(h) + o(k)$.

$|h| \leq \sqrt{h^2+k^2}$, $|k| \leq \sqrt{h^2+k^2}$ より $o(h) = o(k) = o(\sqrt{h^2+k^2})$

$((h,k) \to (0,0))$.

( $o(h)$ が $h$ よりも高次の無限小であれば、$\sqrt{h^2+k^2}$ よりも高次の無限小. $o(k)$ についても同様 ).

ゆえに (与式) $= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + o(\sqrt{h^2+k^2})$

$((h,k) \to (0,0))$.

(2)

## [3] 接平面.

◎ $\mathbb{R}^3$ の平面の(方程)式とその定め方.

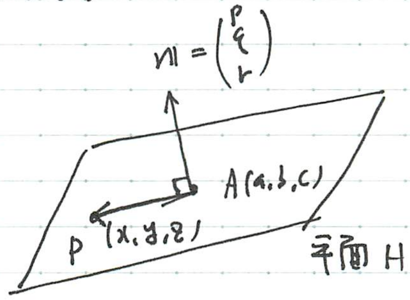
$\mathbb{R}^3$ の平面は

(1) 平面上の1点 A $(a,b,c)$

(2) 平面と垂直に交わるベクトル (法線ベクトル)

$n = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$

が与えられることで一意に定まる.




そこで、これらから平面の(方程)式を求める.

平面上の点を $P(x,y,z)$ とおくと

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AP}$ と $n$ は直交するので、内積をとると

$\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n} = 0.$

$\Longleftrightarrow \quad \underline{p(x-a) + q(y-b) + r(z-c) = 0}.$

平面Hの方程式.

これより $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid p(x-a) + q(y-b) + r(z-c) = 0\}$
と表される.

◎ 全微分と接平面.

関数 $f(x, y)$ が点 $(a, b)$ で全微分可能のとき.

$$(\star) \quad \underset{z}{\overset{}{f(x,y)}} = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \underbrace{o\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)}_{\substack{\Uparrow \\ \text{この項を無視すると}}}, \quad ((x, y) \to (a, b)).$$

次の形に変形できる.

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + (-1)(z - f(a,b)) = 0.$$

これは $\mathbb{R}^3$ の平面の方程式. かつ ($\star$) より, $f(x, y)$ が点 $(a, b)$ の近傍でほぼこの平面のとりうる値をとることを意味する. (これを $f(x, y)$ の 1次近似という)

この平面を, $f(x, y)$ の点 $(a, b)$ における <u>接平面</u> という.

このとき,
$$\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-f(a,b) \end{pmatrix} = 0$$

より, $\begin{pmatrix} -f_x(a,b) \\ -f_y(a,b) \\ 1 \end{pmatrix}$ は接平面の法線ベクトル.

## [4] 合成関数の微分.

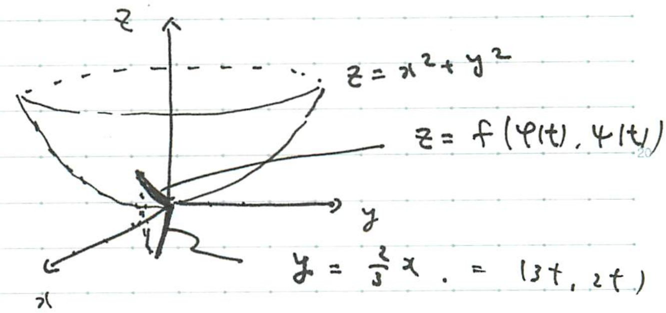
**定理 4.8**　$z=f(x,y)$ : $D\subset\mathbb{R}^2$ の各点で全微分可能.
$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ : $I\subset\mathbb{R}$ で微分可能.
$t\in I$ に対し. $(\varphi(t),\psi(t))\in D$.

合成関数 : $F(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$ とおくとき,
$z=F(t)$ は $t$ の関数として $I$ で微分可能.

(4.8)　$F'(t)=f_x(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)$.

[例]　$f(x,y)=x^2+y^2$ .　$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
$x=\varphi(t)=3t$,　$y=\psi(t)=2t$,　$I=(0,1)$.

このとき　$f(\varphi(t),\psi(t))=(3t)^2+(2t)^2=9t^2+4t^2=13t^2$.




Proof　$I$ : 開区間とする.
$\tau\in I$ とし.　$a=\varphi(\tau)$,　$b=\psi(\tau)$　とおく.
$I$ : 開区間より,　$\tau+h\in I$ をみたす $h$ をとることが可能.

このとき,　$\varphi,\psi$ は微分可能より.

$$\varphi(\tau+h)-a=h\varphi'(\tau)+o(h)\quad(h\to0),$$
$$\psi(\tau+h)-b=h\psi'(\tau)+o(h)\quad(h\to0).$$

これと,上の式より

$$\sqrt{(\varphi(\tau+h)-a)^2+(\psi(\tau+h)-b)^2}$$
$$=\sqrt{(h\varphi'(\tau)+o(h))^2+(h\psi'(\tau)+o(h))^2}$$
$$=\sqrt{h^2(\varphi'(\tau))^2+2h\underset{\varphi'(\tau)}{\wedge}o(h)+(o(h))^2+h^2(\psi'(\tau))^2+2h\psi'(\tau)o(h)+(o(h))^2}$$

$$= \sqrt{O(h^2) + O(h)\,o(h) + (o(h))^2} = O(h) \quad (h \to 0).$$

一方，f が全微分可能より

$$f(\varphi(\tau+h), \psi(\tau+h))$$

$$= f(a,b) + (\varphi(\tau+h)-a) f_x(a,b) + (\psi(\tau+h)-b) f_y(a,b)$$

$$+ o\Big(\underbrace{\sqrt{(\varphi(\tau+h)-a)^2 + (\psi(\tau+h)-b)^2}}\Big) \quad (h \to 0)$$

$$\| $$

$$o(O(h)) = o(h) \quad (h \to 0).$$

ゆえに $F(\tau+h) = F(\tau) + h\{f_x(a,b)\varphi'(\tau) + f_y(a,b)+\psi'(\tau)\}$
$+ o(h) \quad (h \to 0).$

よって，$F(t)$ は $t=\tau$ で微分可能で (4.8) をみたす。 ▨

(4.8) は

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

と表されることもある。

**定理 4.9** $z = f(x,y)$ : $D \subset \mathbb{R}^2$ で全微分可能.
$x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ : $E \subset \mathbb{R}^2$ で偏微分可能.

$$\{(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \mid (u,v) \in E\} \subset D.$$

($\varphi$ と $\psi$ で写される点の集まり（$\varphi$ と $\psi$ の値域）は D に含まれる。

とする。このとき，関数

$$F(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

は，E において $u, v$ に関して偏微分可能で

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = f_x(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)$$
$$+ f_y(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v), \qquad (4.9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = f_x(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)$$
$$+ f_y(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \quad (4.10)$$

が成り立つ．

Proof　(4.9)：$v$を定数として，$u$を$t$とおいて定理4.8を適用する．
(4.10)も同様．　$\square$

(4.9)，(4.10)はそれぞれ
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$
と表されることもある．

例題　(極座標変換)

$f(x,y)$：全微分可能．

$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$：極座標表示
を用いて，$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$を考える．

このとき，
$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\sin\theta,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot(-r\sin\theta)$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\cos\theta.$$

⟶ 例題4.4 (教 p.138) も見てみよう．　$\square$

↓