10/30

[5] 高次偏導関数.

$f(x,y)$ の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が存在して、さらに x や y について偏微分可能のとき.

① x について 2回偏微分したもの : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$

これを $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $f_{xx}(x,y)$ と表す.

①' y について 2回偏微分したもの : $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$

を $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ と表す.

② x, y の順に偏微分したもの : $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$

を $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$ (x,y), $\underbrace{f_{xy}}$ (x,y) と表す.

この偏微分の順番を反映させている.

$x \to y$ の順に偏微分したことを表す.

x, y の表記の順番が異なることに注意.

②' y, x の順に偏微分したもの : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$

を $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ と表す.

これらを f の <u>2次偏導関数</u> という.

3次, 4次, …, の(高次)偏導関数も順次同様に定義される.

$f(x,y)$ の r次偏導関数は 2^r 種類ある.

注意 一般に $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ が存在しても.

$f_{xy} = f_{yx}$ とは限らない. (例 4.3 教 p. 139)

定理 4.10 $f(x,y)$ について.

- 点 (a,b) のある近傍で f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} が存在.
- 点 (a,b) で f_{xy}, f_{yx} が連続

$$\Longrightarrow \quad f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

Proof $\Delta(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b)$
$\qquad - f(a, b+k) + f(a,b)$

とおく. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h,h)}{h^2}$ を 2通りの方法で計算し.

$$\overset{\shortparallel}{f_{xy}(a,b)} = f_{yx}(a,b)$$ を示す.

(1) $F(x) = f(x, b+k) - f(x,b)$ とおく.
(a,b) の近傍で f_x が存在するので, $F(x)$ は x の1変数関数として $x=a$ の近傍で微分可能.
よって. $F(x)$ に対する平均値の定理により,
$0<\theta<1$ が存在して

$$\Delta(h,k) = F(a+h) - F(a) = h\cdot F'(a+\theta h)$$

$$= h\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h, b)\right\}$$

ここで, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ は存在するので, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ に対する平均値の定理により. $0<\theta'<1$ が存在して

$$(与式) = h\cdot k \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta h, b+\theta' k)\right\}.$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h,h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta h, b+\theta' k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ の連続性より ok.

(2) $G(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$ とおく.
(a, b) の近傍で f_y が存在するので, $G(y)$ は y の1変数関数として $y=b$ の近傍で微分可能.
よって, $G(y)$ に対する平均値の定理により,
$0 < \theta < 1$ が存在して

$$\Delta(h,k) = G(b+k) - G(b) = h \cdot G'(b+\theta k)$$
$$= k\left\{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b+\theta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta k)\right\}$$

ここで, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ は存在するので, $\frac{\partial f}{\partial y}$ に対する平均値の定理により, $0 < \theta' < 1$ が存在して

$$(\text{与式}) = h \cdot k \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta' h, b+\theta k)\right\}$$

ゆえに
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h,h)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta' h, b+\theta k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ の連続性よりok.

∎

<u>定義</u> (C^r級 (C^0級, C^∞級)) (圓 p.141)

$D \subset \mathbb{R}^2$.

(1) $f(x,y)$ が D において <u>C^r級</u> or <u>r回連続微分可能</u>

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ D において f の r次以下のすべての偏導関数が存在して連続.

(2) $f(x,y)$ が <u>D において C^∞級</u>

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f は $\forall r \in \mathbb{N}$ に対して C^r級.

(3) $f(x,y)$ が D において C^0級

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(x,y)$ は D において連続.

∎

NO. 28
DATE 10 1 2015

注意 定理 4.10 & 7

(1) $f(x,y)$ が C^r 級のとき，r 次以下の偏導関数は偏微分の順序によらない。
たとえば f が C^3 級ならば

$$f_{xyx} = f_{xxy} = f_{yxx} .$$

(定理 4.10)

(2) $f(x,y)$ が点 $A=(a,b)$ のある近傍 U において C^1 級 $\Rightarrow$ f は A において全微分可能
(定理 4.7)

(3) $f(x,y)$ が C^r 級 $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ は C^{r-1} 級

(この後で使う.) 図

§ 4.3. Taylor の定理

[1] Taylor の定理

- 関数を多項式 (級数) で近似するアイデア.

1変数の場合 (復習) (定理 2.19 図 p.64)

$$\begin{cases} f(x) : [a,b] \ (a<b) \text{ において } C^{n-1} \text{ 級.} \\ f^{(n-1)}(x) : (a,b) \text{ で微分可能} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\exists c \in (a,b)$ s.t.

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n}_{R_n \text{ (剰余項)}} .$$

- b を x とおくと，$f(x)$ を多項式で近似することができる.
- f が C^∞ 級かつ $x \in (a,b)$ で $R_n \to 0$ $(n \to \infty)$
  $\Rightarrow$ f は $x=a$ で Taylor 展開可能.
  (無限級数)

(2)

⑩ 2変数関数の全微分 (図 p.133)

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$$

$f(x,y)$ を x, y の1次式で近似

⇓

1変数関数と同様、より高次の式で近似しよう。

定理 4.12 (Taylor の定理) (2変数版)

$m \in \mathbb{N}$. $f(x,y)$: $D \subset \mathbb{R}^2$ で C^m 級.
$(a,b) \in D$.
$h, k \in \mathbb{R}$ s.t. $\{(a+th, b+tk) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset D$
(点 (a,b) と点 $(a+h, b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれる)

このとき、$\exists \theta$: $0 < \theta < 1$ s.t.

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{1}{j!}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b) + \frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a+\theta h, b+\theta k).$$

⑪ (偏)微分作用素について.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$: $f(x,y)$ の x による偏微分

を、

$\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y))$: $f(x,y)$ に対し、x の偏微分を1回施す(作用させる)

とみなし、$\frac{\partial}{\partial x}$ を作用素と呼ぶ。

$$\boxed{\text{作用素は、それらどうしの加算や乗算、定数倍を行うことがある}}$$

定義 (偏微分作用素) $h, k \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) \overset{\text{def}}{=} h\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

(2) $r \in \mathbb{N}$ に対し.

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(x, y) \overset{\text{def}}{=} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) \times \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{r-1} f(x, y).$$

□

例1
$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y)$$
$$= \left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y)$$
$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

Taylor の定理の仮定より, 微分の順序に依存しないことに注意.

以下, $r = 3, 4, \ldots$ の場合も同様. □

Proof $F(t) = f(a + th, b + tk)$ とおくと.

$F(t)$ は $[0, 1]$ を含むある開区間で C^∞ 級であることを示す.

① $f(x, y)$ は仮定より D で C^∞ 級. よって f は (a, b) で全微分可能 (定理 4.7 / p. 134).

② ① に加え, $\{(a + th, b + tk) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset D$, $a + th$, $b + tk$ は $0 \leq t \leq 1$ で t に関して微分可能. よって $F(t)$ は $[0, 1]$ で t に関して微分可能.
このとき
$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(a + th, b + tk) = \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a + th, b + tk)$$
(定理 4.8 / 教 p. 136)

③ $h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$ は C^{m-1} 級 (p. 28, 注意 (3)).

よって、1変数の Taylor の定理により、$^\exists\theta$; $0<\theta<1$ s.t.

$$\underbrace{F(1)}_{\substack{\| \\ f(a+h,\, b+k)}} = \sum_{j=0}^{m-1} \underbrace{\frac{F^{(j)}(0)}{j!}}_{\substack{\| \\ \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a+h,\, b+tk)}} \cdot 1^j + \underbrace{\frac{F^{(m)}(\theta \cdot 1)}{m!}}_{\substack{\| \\ \frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a+\theta h,\, b+\theta k)}} \cdot 1^m .$$

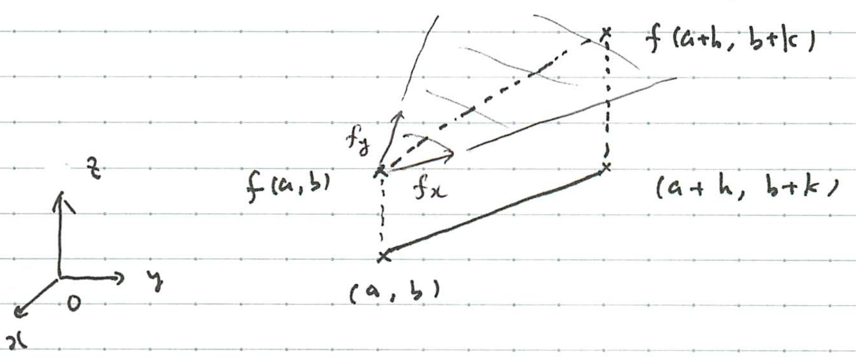
(2)より、主張を得る. ▨

例 4.4 (教 p.146) ($f(x,y)$ の 平均値の定理, 「2次近似」の導出)

(m = 1 の場合.) $f(x,y)$ が C^1 級 のとき. $^\exists\theta$: $0<\theta<1$ s.t.

$$f(a+h,\, b+k) = f(a,b) + h f_x(a+\theta h,\, b+\theta k) + k f_y(a+\theta h,\, b+\theta k).$$

→ 2変数関数に対する平均値の定理.



(m = 2 の場合.) $f(x,y)$ が C^2 級 のとき.
$^\exists\theta$: $0<\theta<1$ s.t.

$$f(a+h,\, b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta h,\, b+\theta k).$$

$$= f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\ b+\theta k) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+\theta h,\ b+\theta k) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h,\ b+\theta k)\right\}.$$

ここで、f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} は連続.
かつ $h^2, |hk|, k^2 \le h^2+k^2$ より

$$\begin{cases} h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\ b+\theta k) = h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + \underbrace{o(h^2)}_{=\,o(h^2+k^2)}. \\ hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+\theta h,\ b+\theta k) = hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) + \underbrace{o(|hk|)}_{=\,o(h^2+k^2)}. \\ k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h,\ b+\theta k) = k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) + \underbrace{o(k^2)}_{=\,o(h^2+k^2)} \end{cases} \quad (※)$$

よって

$$f(a+h,\ b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$
$$+\frac{1}{2}\left\{h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right\} + o(h^2+k^2).$$

$x = a+h$, $y = b+k$ とおくと

$$f(x,y) = \boxed{\boxed{f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} \ (f(x,y)\text{の1次近似}) + \frac{1}{2}\left\{(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) + (y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right\}}$$

($f(x,y)$ の2次近似)

$$+\ o\left((x-a)^2+(y-b)^2\right).$$

補足: p.32 の式 (☆) の導出.

(1) $h^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\, b+\theta k) = h^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + o(h^2)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\, b+\theta k) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ を考えると,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ は連続より,

$$\lim_{h\to 0,\, k\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\, b+\theta k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b).$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0,\, k\to 0} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\, b+\theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \right\} = 0.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\, b+\theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = o(1). \quad \begin{pmatrix} h\to 0 \\ k\to 0 \end{pmatrix}$$

($\boxed{教}$ p.38, 式 (2.9)).

また両辺を h^2 倍すると

$$h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\, b+\theta k) - h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = o(h^2) \quad \begin{pmatrix} h\to 0 \\ k\to 0 \end{pmatrix}$$

($\boxed{教}$ p.40, (o-5).)

よって与式が得られる.

(2) $hk \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h,\, b+\theta k) = hk \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + o(|hk|)$.

(3) $k^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h,\, b+\theta k) = k^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) + o(k^2)$

についても, 同様にして示すことができる. ∎