14/13

補足: p.32 の式(※)の導出.

(1) $h^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\ b+\theta k) = h^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + o(h^2)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\ b+\theta k) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ を考えると,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ は連続より.

$$\lim_{h\to 0,\, k\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\ b+\theta k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b).$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0,\, k\to 0} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\ b+\theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \right\} = 0.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\ b+\theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = o(1). \quad \begin{pmatrix} h\to 0 \\ k\to 0 \end{pmatrix}$$

($\boxed{\text{陀}}$ p.38, 式 (2.9)).

また両辺を h^2 倍すると

$$h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h,\ b+\theta k) - h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = o(h^2) \quad \begin{pmatrix} h\to 0 \\ k\to 0 \end{pmatrix}$$

($\boxed{\text{陀}}$ p.40, (0-5).)

よって与式が得られる.

(2) $hk \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h,\ b+\theta k) = hk \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + o(|hk|)$.

(3) $k^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h,\ b+\theta k) = k^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) + o(k^2)$

についても, 同様にして示すことができる. ◻

[2] 極値

定義 (極大値, 極小値, 極値)

$D \subset \mathbb{R}^2$: 開集合.

f: Dで定義された関数

- f が Dの点 (a,b) において **極大値をとる**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \varepsilon > 0$, $\forall (x,y) \in U_\varepsilon((x,y))$ $f(x,y) \leq f(a,b)$.

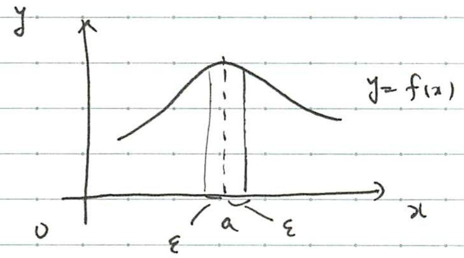
- f が Dの点 (a,b) において **極小値をとる**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \varepsilon > 0$ $\forall (x,y) \in U_\varepsilon((x,y))$ $f(x,y) \geq f(a,b)$.

- 極大値と極小値を合わせて **極値** という. ▨

例

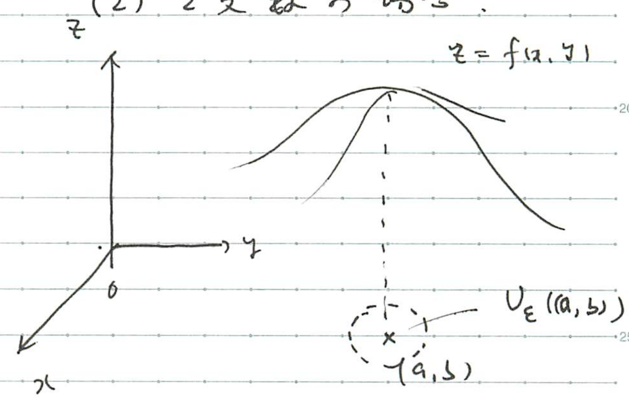
(1) 1変数の場合 (復習)



$y = f(x)$ は $x = a$ において 極大値をとる.

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \varepsilon > 0$ $\forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $f(x) \leq f(a)$.

(2) 2変数の場合.



$z = f(x,y)$ は (a,b) において 極大値をとる. ▨

定理4.13 (極値をとる点の候補)

$f(x,y)$ が Dの点 (a,b) で偏微分可能, かつ (a,b) において 極値をとる

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

☆ 逆は必ずしも成り立つとは限らない点に注意!

Proof　（偏導関数を1変数の場合に帰着させる）

f は点 (a,b) で極値をとるとする。

$F(x) = f(x,b)$ とおくと、$F(x)$ は1変数関数として $x=a$ で極値をとるので、定理2.8（教 p.52）より
$F'(\ ) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$.

$G(y) = f(a,y)$ とおくと、$G(y)$ は1変数関数として $y=b$ で極値をとるので、上と同様にして
$G'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

□

定理4.13より、f が全微分可能（⇒ 偏微分可能）のとき、
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$
となる点 (a,b) が、極値をとる点の候補となる。

◎ では、実際に f が極値をとるのはいつか？
それを調べるために、f の2次導関数（のふるまい）を調べることにする

そこで、f は C^2 級とする。

◎ 1変数の場合の復習。（⟶ 2変数の場合を類推。）

$y=f(x)$ が $x=a$ において極値をとるとする。
$f(x)$ の $x=a$ における Taylor 展開より

$$f(x) = f(a) + \underbrace{f'(a)}_{=0}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + o((x-a)^2) \quad (x \to a)$$

$(x-a)$ の3乗以上の項は無視できる（ぐらい小さいとみなせる）

よって、このとき

$$f(x) \simeq f(a) + \frac{f''(a)}{2!}\underbrace{(x-a)^2}_{> 0 \text{ (if } x \neq a)} \quad (x \to a)$$

$f''(a)$ の正負で、$x=a$ における f の極大／極小が決まる！

$$\begin{cases} f''(a) > 0 \Rightarrow f \text{ は } x=a \text{ で極小値をとる.} \\ f''(a) < 0 \Rightarrow \quad 〃 \quad 〃 \text{ 極大値 } 〃 \text{.} \end{cases}$$

◎ 2変数の場合.

$z = f(x, y)$ が (a, b) において極値をとるとする.
(このとき, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$)

このとき, $f(x,y)$ の点 (a,b) における Taylor 展開より
(see p. 32)

$$f(x,y) = f(a,b) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}_{=0}(x-a) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}_{=0}(y-b)$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\underbrace{(x-a)^2}_{>0} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\underbrace{(y-b)^2}_{>0} \right\} \quad (☆)$$
$$+ o\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right) \quad ((x,y) \to (a,b))$$

よって, このときの点 (a,b) の近傍における $f(x,y)$ の振る舞いは,

上の式 (☆) より, 2次偏導関数の項を抜き出すと

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-a)}.$$

の正負によって, 極値の存在がわかる.

この式を行列とベクトル積で表すと, 以下の表現が得られる:

(12)

$$(x-a \quad y-b)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{6em}}_{H(f)(a,b)}$

$H(f)(a,b)$: $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における Hesse (へッセ) 行列.

f は C^2 級より、へッセ行列は対称行列であることに注意.

◎ 2変数の2次形式.

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} : 2次対称行列 \\ (x,y) \end{cases}$$

に対し、

$$Q_A(x,y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

で定まる、x,y の2次式 $Q_A(x,y)$ を、A の定める<u>2次形式</u>という.

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと $Q_A(x,y) = v \cdot Av$. (内積)

<u>定義</u> (正定符号, 負定符号, 不定符号)

A : 対称行列, Q_A : 2次形式 のとき、

(1) A が <u>正定符号</u> or <u>正定値</u>
$\overset{def}{\iff}$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$ $Q_A(x,y) > 0$.

(2) A が <u>負定符号</u>
$\overset{def}{\iff}$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$ $Q_A(x,y) < 0$.

(3) A が 不定符号

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists (x_1, y_1), \exists (x_2, y_2)$ s.t.
$(x_1, y_1) \neq (0,0)$, $(x_2, y_2) \neq (0,0)$

P.38 例

$Q_A(x_1, y_1) \cdot Q_A(x_2, y_2) < 0$. ▨

符号が異なる.

命題 実2次対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ が

正定値行列 $\Longleftrightarrow$ $a > 0$ かつ

$\det(A) = ac - b^2 > 0$.

Proof

$$Q_A(x, y) = (x \ \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= ax^2 + 2bxy + cy^2$$

を平方完成する.
x, y について

$$Q_A(x, y) = a\left(x^2 + \frac{2b}{a}xy\right) + cy^2$$
$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)y^2\right\} + cy^2$$
$$= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 - \frac{1}{a}(b^2 - ac)y^2$$
$$= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{1}{a}\underbrace{(ac - b^2)}_{=\det(A)}y^2$$

$\therefore$ $Q_A(x, y) > 0 \Longleftrightarrow a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$.

▨

系 (1) A が負定符号

$\iff a < 0$ かつ $\det(A) = ac - b^2 > 0$.

(2) A が不定符号

p.37

$\iff \det(A) = ac - b^2 < 0$.

∎

例 (1) 正定値行列の例.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aの定める2次形式を求めると.

$$Q_A(x, y) = (x \ \ y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x + y^2) > 0.$$

(2) 不定符号の例.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aの定める2次形式を求めると.

$$Q_A(x, y) = (x \ \ y) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= -2x^2 + 2xy + y^2.$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_A(1, 0) = -2 < 0. \\ Q_A(0, 1) = 1 > 0 \end{array}\right\}$$ より A は不定符号.

∎

◎ 2変数関数の場合のまとめ.

$f(x,y)$: C^2級. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対し.

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

この点における 2次近似式 :

$$f(x,y) \simeq f(a,b) + \underbrace{\frac{1}{2}\left\{ (x-a,\ y-b) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \right\}}_{= Q_{H(f)(a,b)}(x-a,\ y-b)}$$

よって. Hesse 行列 $H(f)(a,b)$ が

(1) 正定符号 $\Rightarrow$ $f(a,b)$ は 極小値.
(2) 負定符号 $\Rightarrow$ 〃 極大値.
(3) 不定符号 $\Rightarrow$ 〃 極値ではない.

これをまとめて. 次の定理を得る.

<u>定理 4.14</u> $D \subset \mathbb{R}^2$. $f(x,y) : D \to \mathbb{R}$: C^2級.
$(a,b) \in D$ において $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

$$D = \det\left(H(f)(a,b)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

とおく. このとき. 次が成り立つ.

(1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ かつ $D > 0$

$\Leftrightarrow$ f は (a,b) で極小値をとる.

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ かつ $D > 0$

$\Rightarrow$ f は点 (a,b) で極~~小~~大値をとる.

(3) $D < 0$ $\Rightarrow$ f は点 (a,b) で極値をとらない.

$\boxtimes$

注意 (1) 教科書の定理では $\Delta = -D$.

(2) $D = 0$ の場合はこの定理では極値の存在を判定できない. $\boxtimes$

例題 4.5 (図 p.149) 関数の極値をもとめる.

(1) $f(x,y) = 6x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x^3$.

① 極値をもつ可能性のある点を求める.
($\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ がともに 0 になる点)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x + 6y - 6x^2 = 6(2x + y - x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x + 6y = 6(x+y)$$

ともに 0 になるとき, $\begin{cases} 2x + y - x^2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

これを解くと $(x,y) = (0,0)$, $(1,-1)$

のこりは余白.

② Hesse 行列を計算する.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12 - 12x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6.$$

$$\therefore H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 12(1-x) & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

③ Hesse 行列の符号を調べて，極値の存在判定を行う．

(i) $(0,0)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 12 > 0$.

$D = \det(H(f)(0,0)) = \det\left(\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\right)$

$= 72 - 36 = 36 > 0$.

より，f は $(0,0)$ において極小値をもつ．

極小値は $f(0,0) = 0$.

(ii) $(1,-1)$:

$D = \det(H(f)(1,-1)) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\right)$

$= 0 - 36 = -36 < 0$

より，f は $(1,-1)$ において極値をもたない．

$\boxed{/\!/}$

注意　$\det(H(f)(a,b)) = 0$ の場合は，
定理4.14で極値の存在を判定することができない ⇒ 個々の関数のふるまいを調べる必要がある．

（ 数 p. 149，例題 4.5 (2)
　 演 p. 128 ）

補足　3変数以上の極値問題も2変数の場合とほぼ同様
→ 演 §3.4.4，p. 128.

但し，2次形式の符号の判定法は拡張されているので注意．（演 p. 129）

$\boxed{/\!/}$