11/20

§4.4 陰関数定理 (図 p.151)

[1] 陰関数定理

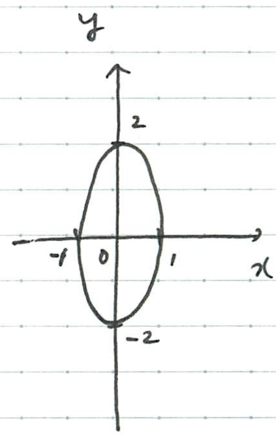
◎ 陰関数とは？

(例) $F(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4$.

$\updownarrow$

楕円： $4x^2 + y^2 = 4$

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$



のグラフは、$\mathbb{R}^2$ 上で
方程式 $F(x,y) = 0$ をみたす点 (x,y) 全体
である。
これを F の零点集合 という。

$$Z = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0 \}$$

で表す。

方程式 $F(x,y)=0$ は、ある x に対し、ある y を対応づける「関数のようなもの」とみなすことができる。(例：$x=1$ のとき $y=0$ とすれば $F(x,y) = F(1,0) = 0$.)

しかし、この対応は、一般には関数でない。

例えば $x=0$ のとき、$F(0,y)=0$ をみたす y は ± 2 の 2個が対応(存在)する。

ところが、たとえば 領域 D を、x軸を含む上半平面
$D = \{(x,y) \mid y \geq 0\}$ に限定すると、D上で 方程式 $F(x,y)=0$
をみたす点の集まりは

$$\{ (x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ y = \sqrt{4-4x^2} \}$$

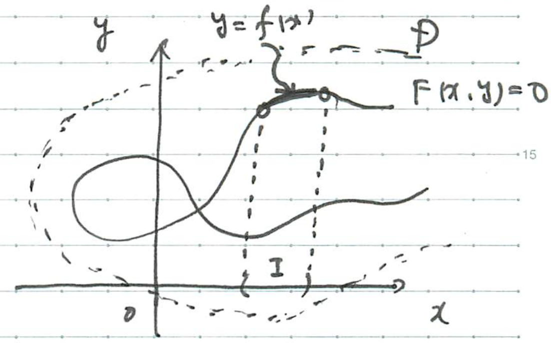
のように、x を変数とする関数 y の形で表すことができる。
このように、領域をせばめて、その中で方程式 $F(x,y)=0$ をみたす点の集まりを $y = f(x)$ の形で表したもの (f) を「$F(x,y)=0$ によって定まる陰関数」という。

定義（陰関数）（図 p.151）

$D \subset \mathbb{R}^2$：開集合，$F(x,y) : D \to \mathbb{R}$．
のとき，区間 I において定義された（1変数）関数 $y = f(x)$ が

$$\forall x \in I \quad (x, f(x)) \in D \text{ かつ } F(x, f(x)) = 0$$

をみたすとき，$y = f(x)$ を <u>$F(x,y) = 0$ によって定まる陰関数</u> という．



◎ 陰関数定理

- $F(x,y) = 0$ が与えられたとき，陰関数は常に存在するか？
- もし陰関数が存在する場合，それは一意的に定まるか？
- その微分は どうなるか？

という問いに答えるのが「陰関数定理」である．
（ついでに，陰関数定理は，このあとに説明する「ラグランジュの未定乗数法」にも用いられる．）

定理 4.15 （陰関数定理）

$D \subset \mathbb{R}^2$：開集合．$F(x,y) : D \to \mathbb{R}$，$C^1$級．
D の点 (a,b) で $F(a,b) = 0$ かつ $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$．

このとき，

- I: 点 a を含む開区間
- $y = f(x)$: I において定義された関数
- $\varepsilon > 0$

で、以下をみたすものが存在する:

(0) $b = f(a)$.

(1) $f(x)$ は $F(x, y) = 0$ が定める陰関数.

(2) $x_0 \in I$, $|y_0 - b| < \varepsilon$ かつ $F(x_0, y_0) = 0 \implies y_0 = f(x_0)$.

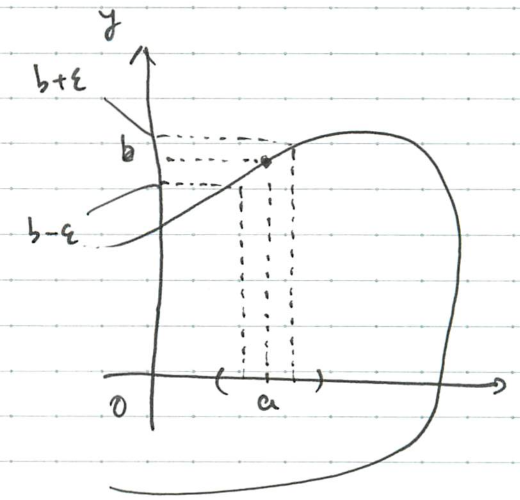
(3) $\forall x \in I$ $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$.

さらに、このとき f は C^1 級で

$$\forall x \in I \quad f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

さらに F が C^r 級 $\implies$ f も C^r 級.

Proof (竹山美宏先生のノートにより証明をフォローします)



Step I (εと I の定め方.)

・仮定より F は C^1 級なので、$\dfrac{\partial F}{\partial y}$ は D において連続.

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b) > 0$ より、

$\exists \delta_0 > 0$, $\exists \varepsilon > 0$ $|x - a| \leq \delta_0$ かつ $|y - b| \leq \varepsilon$

$$\implies \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0.$$

証明では $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ とする. ($\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) < 0$ の場合も同様)

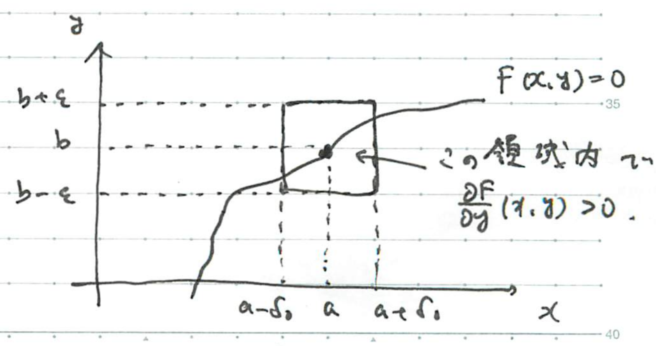


Fig. 1

・特に、$x=a$ において
$y \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ で
$\frac{\partial F}{\partial y}(a, y) > 0$. ゆえに

この範囲で $F(a,y)$ は y の
関数として単調増加。よって

$$\underset{0}{\underset{\wedge}{F(a, b-\varepsilon)}} < \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F(a,b)}} < \underset{0}{\underset{\vee}{F(a, b+\varepsilon)}}.$$

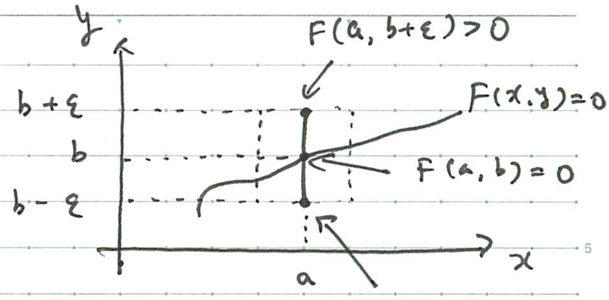


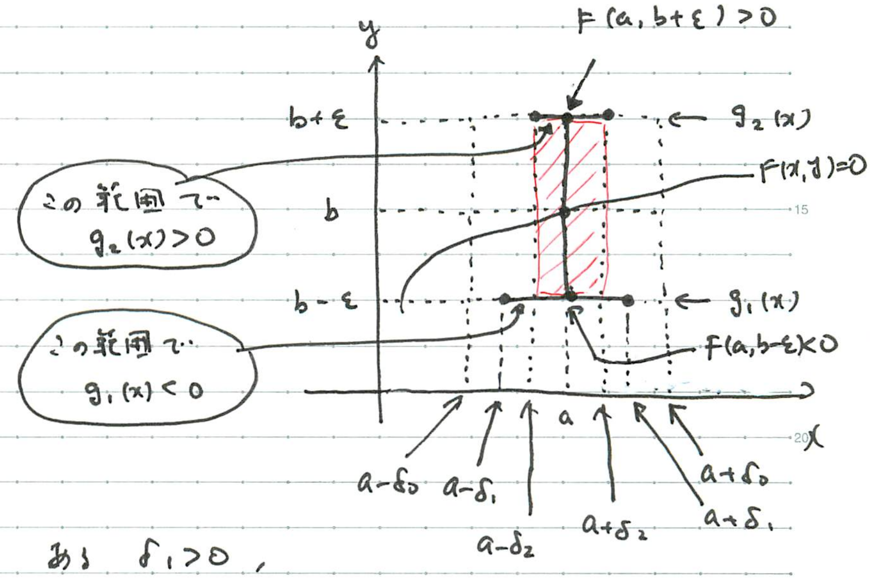
Fig. 2

・ここで、

$$\begin{cases} g_1(x) = F(x, b-\varepsilon) \\ g_2(x) = F(x, b+\varepsilon) \end{cases}$$

とおくと、$g_1(x)$, $g_2(x)$ は
ともに $x=a$ の近傍で
連続で、かつ

$$\begin{cases} g_1(a) = F(a, b-\varepsilon) < 0, \\ g_2(a) = F(a, b+\varepsilon) > 0. \end{cases}$$



よって、Fig.3 のように、ある $\delta_1 > 0$,
$\delta_2 > 0$ が存在して

Fig. 3

$$\begin{cases} |x-a| < \delta_1 \Rightarrow g_1(x) = F(x, b-\varepsilon) < 0, \\ |x-a| < \delta_2 \Rightarrow g_2(x) = F(x, b+\varepsilon) > 0. \end{cases}$$

・そこで、$\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ とおき (Fig. 3 では
$\delta = \delta_2$), 開区間 I を

$$I = (a-\delta, a+\delta)$$

と定める。

・このようにして定めた ε と I (Fig. 3 では赤の斜線部分)
において、次が成り立つ。
(境界線は直線 $y = b \pm \varepsilon$ のみ含む)

(i) $x \in I$ かつ $|y-b| \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$.

(ii) $x \in I \Rightarrow F(x, b-\varepsilon) < 0, \quad F(x, b+\varepsilon) > 0$.

Step 2 (関数 f の構成)

- $\xi \in I$ を1つ固定し、
  $\varphi(y) = F(\xi, y)$ とおく。
  このとき、上の (i) より
  - $\varphi(y)$ は $y \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ において連続。
  - $\varphi'(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(\xi, y) > 0$.

- よって、$\varphi(y)$ は $y \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ において単調増加。

- また、上の (ii) より、$\varphi(b-\varepsilon) < 0$ かつ $\varphi(b+\varepsilon) > 0$.

- よって、中間値の定理より、$\varphi(\eta) = 0$ をみたす $\eta \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ がただ1つ存在する。

- 以上の手順で、各 $\xi \in I$ に対して、$\eta \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ で $\varphi(\eta) = F(\xi, \eta) = 0$ をみたす η がただ1つ定まる。よって、I 上で、対応 $\xi \mapsto \eta$ により関数

$$f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & [b-\varepsilon, b+\varepsilon] \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \xi & \longmapsto & \eta \end{array}$$

を定める。

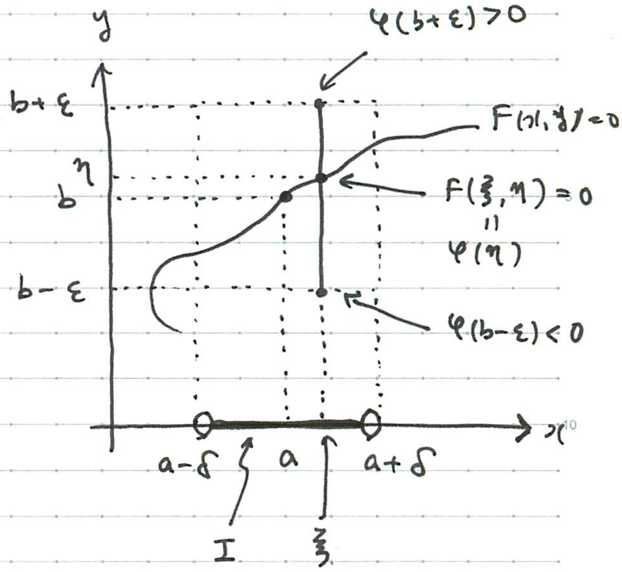


Fig. 4

このようにして定める関数 $f(x)$ は、定理の条件 (0)〜(3) をみたす(各自確かめよう)。

Step 3 (関数 f の連続性)

$x_0 \in I$ とする。$\forall \varepsilon > 0$ に対し、Step 1, 2 と同様にして、$\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t.

$\varepsilon \geqq \varepsilon_0 > 0$ かつ

$F(x_0, f(x_0) - \varepsilon_0) < 0$, $F(x_0, f(x_0) + \varepsilon_0) > 0$.

$(f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0)$ で $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ は単調増加。

このような ε_0 に対し、Step 1, 2 と同様にして
$\exists \delta > 0$ s.t.

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow F(x, f(x_0) - \varepsilon_0) < 0, \quad F(x, f(x_0) + \varepsilon_0) > 0$$

$$\therefore F(x, f(x_0) - \varepsilon_0) < \underset{\substack{\| \\ 0}}{F(x, f(x))} < F(x, f(x_0) + \varepsilon_0)$$

$\therefore\ f(x_0) - \varepsilon_0 < f(x) < f(x_0) + \varepsilon_0$

$\therefore\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0 \leqq \varepsilon.$

よって $f(x)$ は $x = x_0$ で連続.
上記より x_0 は I の任意の点をとれるので, $f(x)$ は I において連続.

Step 4 (関数 f が I において C^1 級であること)

・ $a' \in I$ とし, $h \in \mathbb{R}$ を $a' + h \in I$ をみたすようにとる.
$k = f(a'+h) - f(a')$ ⋯ (＊) とおく.

・ 2変数関数に対する平均値の定理 (例 4.4, $\boxed{\text{数}}$ p.146) より $\exists\ 0 < \theta < 1$ s.t.

$$\underbrace{F(a'+h,\ f(a')+k)}_{=0} = \underbrace{F(a',\ f(a'))}_{=0}$$
$$+\ h \cdot F_x(a'+\theta h,\ f(a') + \theta k)$$
$$+\ k \cdot F_y(a'+\theta h,\ f(a') + \theta k).$$

このとき

$$k = f(a'+h) - f(a') = -\frac{F_x(a'+\theta h,\ f(a')+\theta k)}{F_y(a'+\theta h,\ f(a')+\theta k)}h.$$

両辺を h でわると

$$\frac{k}{h} = \frac{f(a'+h)-f(a')}{h} = -\frac{F_x(a'+\theta h,\ f(a')+\theta k)}{F_y(a'+\theta h,\ f(a')+\theta k)}.$$

上の (＊) より $h \to 0$ のとき $k \to 0$. ゆえに

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a'+h)-f(a')}{h} = -\frac{F_x(a',\ f(a'))}{F_y(a',\ f(a'))} \qquad (＊＊)$$

が存在することがわかる. これは $f'(a')$ である.
$\forall a' \in I$ $F_y(a', f(a')) \neq 0$ より, $f'(x)$ は I で連続.
$\therefore$ $f(x)$ は C^1 級. (同様に F が C^r 級であれば F_x, F_y は C^{r-1} 級 $\Rightarrow$ (＊＊) より $f'(x)$ も C^{r-1} 級. ゆえに $f(x)$ は C^r 級) ∎

注意 (1) $F(x,y)=0$ によって定まる陰関数 $y=f(x)$ が C^1 級であるならば、$f'(x)$ は次のように計算可能。

$F(x,f(x))=0$ の両辺を x で微分すると

$$F_x(x,f(x))\cdot 1 + F_y(x,f(x))\frac{dy}{dx} = 0.$$

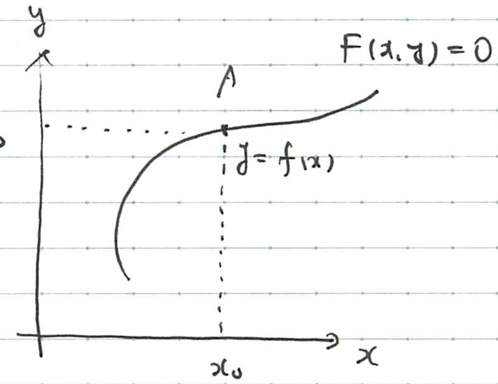
↑（合成関数の微分より）

これを整理すると $\displaystyle \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$. ■

(2) 定理4.15は、x と y の役割を入れ替えても成り立つ。点 (a,b) が $F(a,b)=0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$ をみたすとき、点 b を含むある開区間 J において $F(x,y)=0$ によって定まる陰関数 $g(y)$ が存在する。

$(\Leftrightarrow \ \forall y \in J \quad F(g(y),y)=0.)$

例題（曲線の接線）



$$\begin{cases} F(x,y): C^1\text{級}. \\ \text{曲線 } C: F(x,y)=0. \end{cases}$$

$A=(x_0,y_0)$: 曲線 C 上の点

$(\because F(x_0,y_0)=0.)$

このとき、点 A の近傍で、$F(x,y)=0$ によって定まる陰関数 $y=f(x)$ が存在する。

（$y=f(x)$ のグラフは点 A の近傍で曲線 C に一致する。）

このとき、$y=f(x)$ の $x=a$ における接線は、曲線 C の点 A における接線に一致する。

$\boxed{y=f(x) \text{ の } x=x_0 \text{ における接点}}$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

↑

陰関数定理より

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

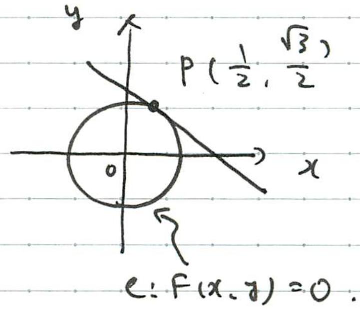
を代入すると

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

(例) (読 p.134) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

円 $C: F(x, y) = 0$ 上の点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における接線の式.

- 陰関数から直接求めた場合.



円 C 上で点 P を通る陰関数は

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

これより $f'(x) = -\dfrac{x\,\cancel{1}}{\sqrt{1-x^2}}$.

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ より, 点 P における接線の式は

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \iff x + \sqrt{3}y = 2.$$

- 陰関数定理を用いて求めた場合.

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の両辺を

x で微分すると $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$.

∴ $y \neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は $y \neq 0$ より陰関数定理が適用できて

接線の式は

$$2\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\therefore\ x + \sqrt{3}y = 2.$$