12/18

第5章：重積分

◎ 本章で扱う内容：

$\begin{cases} D \subsetneq \mathbb{R}^2 & : \text{有界(で, しかるべき条件をみたす)集合.} \\ f(x,y) & : \text{D上で定義された関数} \end{cases}$

に対し, 重積分

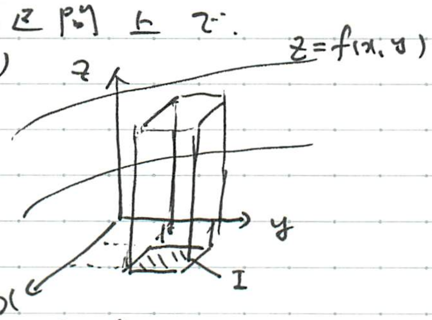
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

を定義し, その実際の計算法を示す.

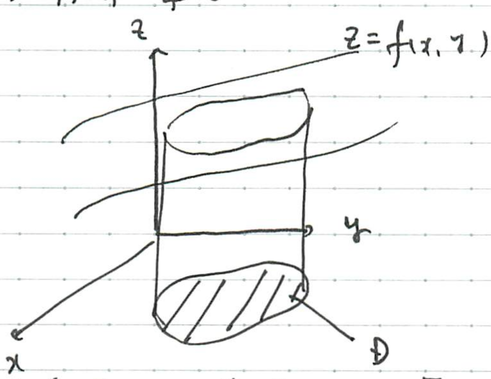
〈道筋〉

① 重積分の定義

(1) 有界閉区間上で.
(長方形)



(2) 一般の有界集合で.



② 累次積分 (重積分の実際の計算法)

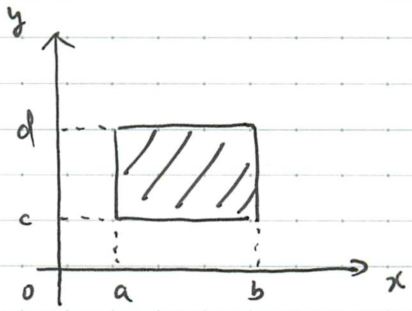
③ 重積分の変数変換.

④ 広義積分

◎ 重積分の定義（その1）：有界閉区間の場合．
（§5.1, 5.2）

• $I = [a,b]\times[c,d]$ ：有界閉区間（長方形）
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$

$f(x,y) : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
<u>有界</u>と仮定する．



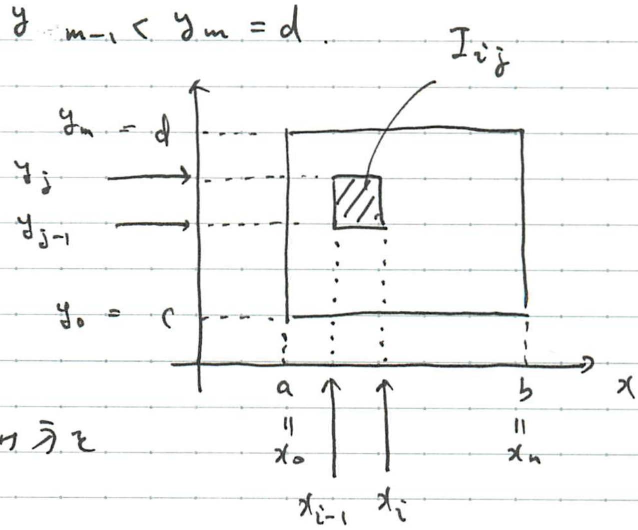
• Iの分割 … Iを小さな長方形に分割する．
$\quad$ ″ $[a,b]\times[c,d]$

$$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d. \end{cases}$$

$I_{ij} \overset{\text{def}}{=} [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

とすると，Iはmn個の小区間 I_{ij}
$(i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m)$

に分かれる．このような分け方を<u>Iの分割</u>という．



$$\Delta = \{I_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

で表す．

$|\Delta|$ ：分割Iにおける，I_{ij}の対角線の長さの最大値．

$$|\Delta| \overset{\text{def}}{=} \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}.$$

① 過剰和，不足和

Iの分割 $\Delta = \{I_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ に対し．

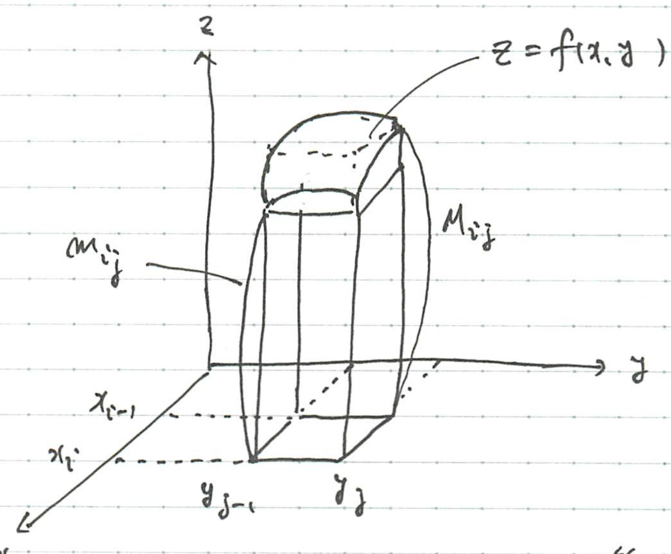
$$M_{ij} \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y) = \sup\{f(x,y) \mid (x,y)\in I_{ij}\}.$$

$$m_{ij} \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y) = \inf\{f(x,y) \mid (x,y)\in I_{ij}\}$$

とおく．このとき，Iを底面とし，上部が $z=f(x,y)$ で与えられる曲面をもつ立体の体積を近似する量として以下の2種類を定める：

<u>過剰和</u> $$\overline{S}(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

<u>不足和</u> $$\underline{S}(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$



<u>注意</u> 分割Δを"細かく"すると，過剰和は等しいかより小さくなり，不足和は等しいかより大きくなる．

⑪ 上積分，下積分

Iの分割すべてを考えた上で

$\overline{S}(f) := \inf_{\Delta} \overline{S}(f;\Delta)$　　$\underline{S}(f) := \sup_{\Delta} \underline{S}(f;\Delta)$

$= \inf \{ \overline{S}(f;\Delta) \mid \Delta$ は I の分割$\}$

$\underline{S}(f) := \sup_{\Delta} \underline{S}(f;\Delta) = \sup \{ \underline{S}(f;\Delta) \mid \Delta$ は I の分割$\}$

と定める．

$\begin{cases} \overline{S}(f) : \text{上積分，(or 過剰積分)} \\ \underline{S}(f) : \text{下積分 (or 不足積分)} \end{cases}$

という．（このとき $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$．）

定義 5.1

$\begin{cases} I : \mathbb{R}^2 \text{の有界閉区間．} \\ f(x,y) : I \text{上定義された有界な関数．} \end{cases}$

が $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ をみたすとき，f は<u>リーマン積分可能</u>であるという．

その値：$\iint_I f(x,y)\,dxdy$ と表す．

I上での関数 f の<u>重積分</u>という．

I：この重積分の<u>積分領域</u>という．□

・重積分の性質

定理 5.1 （ダルブー (Darboux) の定理）

$\begin{cases} I : \mathbb{R}^2 \text{の有界閉区間．} \\ f(x,y) : I \text{上定義された有界な関数} \end{cases}$

$$\begin{cases} \overline{S}(f) : & I\text{上での}f\text{の 上積分} \\ \underline{S}(f) : & \quad〃 \quad \text{下積分} \end{cases}$$

これより、

$$\underline{S}(f) = \lim_{|\Delta| \to 0} \underline{S}(f;\Delta), \quad \overline{S}(f) = \lim_{|\Delta| \to 0} \overline{S}(f;\Delta)$$

が成りたつ。 ▨

☆ 上積分、下積分は、Iの分割をどんどん細かくしていったときの極限として得られる。

<u>定義</u> (リーマン和)

I : $\mathbb{R}^2$の有界閉区間。
$f(x,y)$: I上定義された有界な関数。

$$\Delta = \{I_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \quad : \quad I\text{の分割}$$

代表点 : $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in I_{ij}$.

$$\xi = \{(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in I_{ij} \mid i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\}$$

とするとき、

$$R(f;\Delta;\xi) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

をfのI上の分割Δによる<u>リーマン和</u>という。 ▨

<u>定理 5.2</u> I : $\mathbb{R}^2$の有界閉区間。
$f(x,y)$: I上定義された有界な関数。
$\Delta = \{I_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$: Iの分割
$\xi = \{(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in I_{ij} \mid i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\}$
(代表点)

とする。このとき、次が成りたつ。

(1) $f(x,y)$ が I でリーマン積分可能

$\Rightarrow$ $R(f;\Delta;\xi) \longrightarrow \iint_I f(x,y)\,dxdy \quad (|\Delta| \to 0)$.

(2) $\forall \xi$ (分点のとり方) $R(f;\Delta;\xi) \to S \quad (|\Delta| \to 0)$

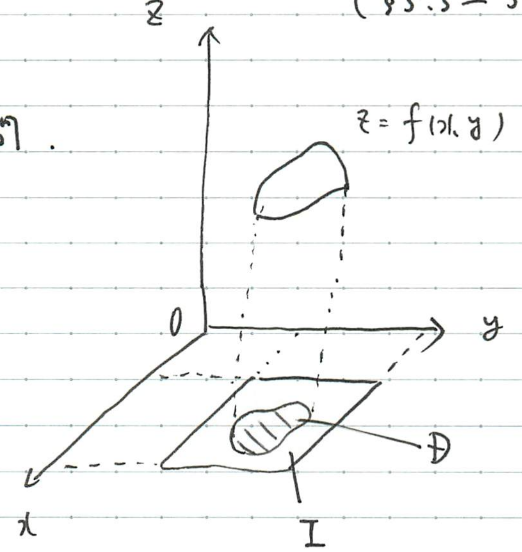
$\Rightarrow$ $f(x,y)$ は I でリーマン積分可能で,

$$S = \iint_I f(x,y)\,dxdy.$$ □

◎ 重積分の定義 (その2): 一般の有界集合の場合.
(§5.3 – 5.5)

$D \subset \mathbb{R}^2$: 空でない有界集合.

$D \subset I$: 有界閉区間.



のとき, I 上の関数

$\tilde{f}(x,y)$ を

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \in D) \\ 0 & ((x,y) \in I \setminus D) \end{cases}$$

と定義する (教 p.178).

<u>定義 5.4</u> D, I と $\tilde{f}(x,y)$ を上の通りとする. このとき

$f(x,y)$ が D において (リーマン) 積分可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\tilde{f}(x,y)$ が I においてリーマン積分可能.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy := \iint_I \tilde{f}(x,y)\,dxdy.$$

$\boxed{f\text{ の }D\text{ 上の積分}}$ $\boxed{\tilde{f}\text{ の }I\text{ 上の積分.}}$

□

注意 $f(x,y)$ の D 上での積分可能性, および積分値は, 有界閉区間 I のとり方によらない.

ここまでで.

$f(x,y)$ が有界集合 D においてリーマン積分可能か?

$\Longleftrightarrow$ $\tilde{f}(x,y)$ が I においてリーマン積分可能か?

$\Longleftrightarrow$ D は $\mathbb{R}^2$ において ジョルダン可測 (面積確定) か?

どんな場合に成りたつかを調べる.

ジョルダン測度.

定義 (定義関数) (教 p. 173)

$A \subset \mathbb{R}^2$ のとき,

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1 & ((x,y) \in A) \\ 0 & ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A) \end{cases}$$

によって定まる関数 χ_A を A の**定義関数**という. ▨

12/25

定義 5.3 (ジョルダン外測度, ジョルダン内測度)

$B \subset \mathbb{R}^2$: 有界集合.
$B \subset I$: 有界閉区間.
このとき,

B のジョルダン外測度 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\chi_B(x,y)$ の I における上積分 $\overline{S}(\chi_B) =: \overline{\mu}(B)$.

B のジョルダン内測度 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\chi_B(x,y)$ の I における下積分 $\underline{S}(\chi_B) =: \underline{\mu}(B)$. ▨