<u>注意</u> $f(x,y)$ の D 上での積分可能性, および積分値は, 有界閉区間 I のとり方によらない.

ここまでで.

$f(x,y)$ が有界集合 D においてリーマン積分可能か?

$\Leftrightarrow$ $\tilde{f}(x,y)$ が I においてリーマン積分可能か?

$\Leftrightarrow$ D は $\mathbb{R}^2$ において可測 (面積確定) か?

ジョルダン

どんな場合に成りたつかを調べる.

◎ジョルダン測度.

<u>定義</u> (定義関数) (数 p. 173)

$A \subset \mathbb{R}^2$ のとき,

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1 & ((x,y) \in A) \\ 0 & ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A) \end{cases}$$

によって定まる関数 χ_A を A の<u>定義関数</u>という. ▨

<u>定義 5.3</u> (ジョルダン外測度, ジョルダン内測度)

12/25

$B \subset \mathbb{R}^2$: 有界集合.
$B \subset I$: 有界閉区間.
このとき,

B のジョルダン外測度 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\chi_B(x,y)$ の I における上積分 $\overline{S}(\chi_B) =: \overline{\mu}(B)$.

B のジョルダン内測度 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\chi_B(x,y)$ の I における下積分 $\underline{S}(\chi_B) =: \underline{\mu}(B)$. ▨

◎ ジョルダン外測度，内測度の意味．

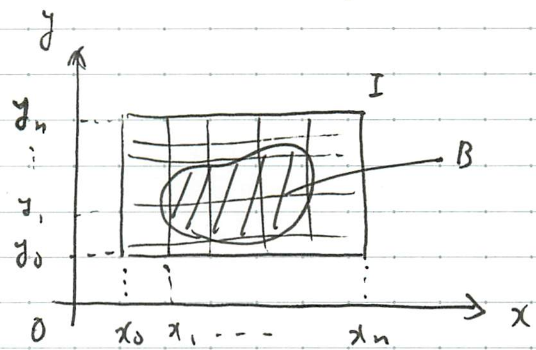
過剰和　$\overline{S}(\chi_B;\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

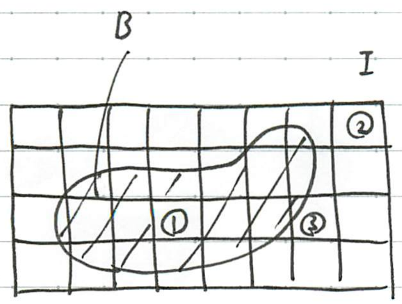
不足和　$\underline{S}(\chi_B;\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

Δ : I の分割　$\{I_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$.

$$M_{ij} = \sup_{(x,y)\in I_{ij}} \chi_B, \qquad m_{ij} = \inf_{(x,y)\in I_{ij}} \chi_B .$$

このとき，I_{ij} と B の関係により，M_{ij}，m_{ij} の値は以下のように場合分けされる．





（I_{ij} は B に含まれる）

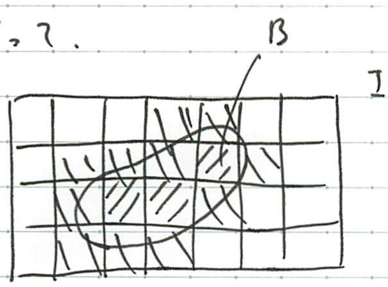
① $I_{ij} \subset B$: $M_{ij}=1$, $m_{ij}=1$.

② $I_{ij} \subset \mathbb{R}^2 \setminus B$: $M_{ij}=0$, $m_{ij}=0$.
（I_{ij} は B に含まれない）

③ $I_{ij} \cap B \neq \emptyset$ かつ $I_{ij} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B) \neq \emptyset$:
（I_{ij} は B の点も B 以外の点ももつ）

$$M_{ij} = 1, \quad m_{ij} = 0 .$$

よって，



$\overline{S}(\chi_B;\Delta)$ = （B と交わる小区間 I_{ij} の面積の和）
（図の▨と▧の部分の面積の和）

$\underline{S}(\chi_B;\Delta)$ = （B に含まれる小区間 I_{ij} の面積の和）
（図の▨の部分の面積の和）．

$\overline{S}(\chi_B)$, $\underline{S}(\chi_B)$ は、すべての分割 Δ に対して、それぞれ $\overline{S}(\chi_B;\Delta)$ の下限および $\underline{S}(\chi_B;\Delta)$ の上限をとったものなので、大ざっぱには

$\overline{\mu}(B) = \overline{S}(\chi_B)$: B の面積を外側から測った値
$\underline{\mu}(B) = \underline{S}(\chi_B)$: 〃 内側から測った値

となっている。

◎ 可測集合。

<u>定義 5.2</u> (ジョルダン可測) $B \subset \mathbb{R}^2$: 有界集合

が $\overline{\mu}(B) = \underline{\mu}(B)$ をみたすとき、
B は <u>ジョルダン可測</u> (or <u>面積確定</u>) という。

$\overline{\mu}(B) = \underline{\mu}(B)$ を B の <u>面積</u> といい、
$\mu(B)$ または $|B|$ で表す。 ▨

<u>定理 5.6</u> $B \subset \mathbb{R}^2$: 有界集合のとき、

B が可測 (面積確定) $\iff$ (B の境界 ∂B のジョルダン外測度) $= 0$.

▨

<u>定義</u> (零拡張) 教 p.178

$D \subset \mathbb{R}^2$: 有界な可測集合、
$f(x,y)$: D 上定義された有界な関数
のとき、$D \subset I$: 有界閉区間に対し、

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{if } (x,y) \in D \\ 0 & \text{if } (x,y) \in I \setminus D \end{cases}$$

で定義される $\tilde{f}(x,y)$ を $f(x,y)$ の <u>零拡張</u> という。

▨

NO. 66

DATE 12 . 16 . 2015

◎ リーマン積分可能性の十分条件

定理5.8 (p.179)　$D \subset \mathbb{R}^2$：有界な可測集合．
$f(x,y)$：D 上定義された有界な関数．
ジョルダン外測度が 0 の集合 N を除いて連続．

$\Rightarrow$ f は D においてリーマン積分可能．

1/8

◎ 重積分の基本的な性質．

定理 5.10 (p.182)　D：有界な可測集合．
$f(x,y)$，$g(x,y)$：D で定義された有界関数．
リーマン積分可能．

(2)　$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し．$\alpha f + \beta g$ もリーマン積分可能で

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx\,dy$$

$$= \alpha \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_D g(x,y)\,dx\,dy .$$

(3)　D において常に $f(x,y) \leq g(x,y)$ が成り立つならば

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy .$$

(4)　関数 $|f(x,y)|$ も D でリーマン積分可能で

$$\left| \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy .$$