⑳ リーマン積分可能性の十分条件

定理5.8 (p.179) $D \subset \mathbb{R}^2$: 有界な可測集合.
$f(x,y)$: D上定義された有界な関数.
ジョルダン外測度が 0 の集合 N を除いて連続.

$\Rightarrow$ f は D においてリーマン積分可能.

㉑ 重積分の基本的な性質.

定理5.10 (p.182) D : 有界な可測集合.
$f(x,y)$, $g(x,y)$: Dで定義された有界関数.
リーマン積分可能.

(2) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し. $\alpha f + \beta g$ もリーマン積分可能で

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dx\,dy$$
$$= \alpha \iint_D f(x,y)\, dx\,dy + \beta \iint_D g(x,y)\, dx\,dy .$$

(3) D において常に $f(x,y) \leq g(x,y)$ が成り立つならば

$$\iint_D f(x,y)\, dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\, dx\,dy .$$

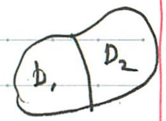
(4) 関数 $|f(x,y)|$ も Dでリーマン積分可能で

$$\left| \iint_D f(x,y)\, dx\,dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\, dx\,dy .$$

1/22

定理 ~~6~~5.10 (2)

$$\begin{cases} D = D_1 \cup D_2 & \text{かつ} \\ D_1, D_2 \text{ はジョルダン可測.} \\ D_1 \cap D_2 \text{ は内点を含まない.} \end{cases}$$



$f(x,y)$: D 上定義された関数.

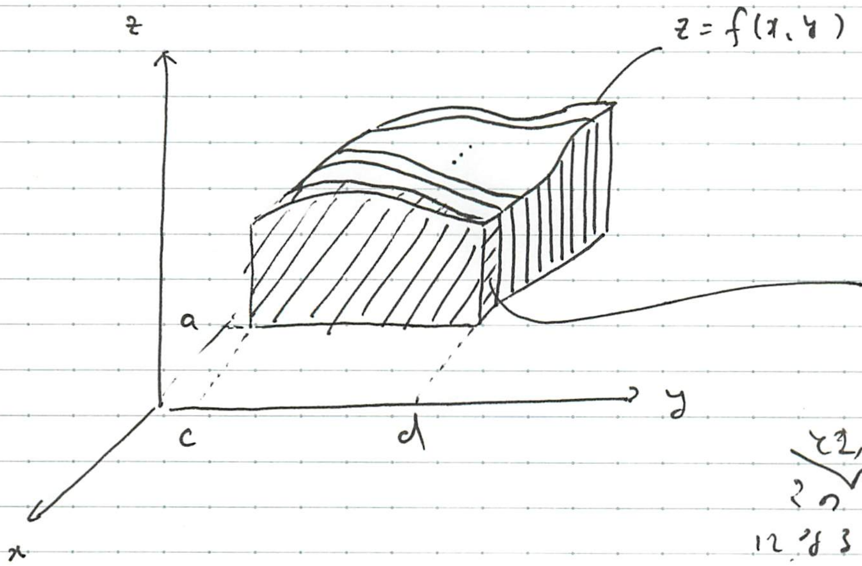
このとき、$f(x,y)$ が D でリーマン積分可能ならば、$f(x,y)$ は D_1, D_2 においても積分可能で、

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

□

§5.6 重積分と累次積分 (p.184)

◎ 有界閉区間上の累次積分.



アイデア

$I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$.

x を $[a,b]$ 内で1つ固定して、図の斜線部のような薄片を考える。

このとき、図の斜線部は x の関数になるものとする。

そこで、その薄片を $x \in [a,b]$ で積分することで、図の重積分が求まる。

（累次積分）
定理 5.11 （p.184） $I=[a,b]\times[c,d]\subsetneq\mathbb{R}^2$：有界閉区間.

$f(x,y)$：・I 上で定義され，有界．
積分可能．
① ・$x=x_0\in[a,b]$ を固定したとき，$f(x_0,y)$ が $y\in[c,d]$ で y の関数として積分可能．

$$\Longrightarrow \iint_I f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\underbrace{\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)}_{x\text{の関数}}dx. \quad (5.1)$$

~~注意 式(5.1)の右辺は~~
$$\cancel{\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy}$$
~~と表されることもある．~~

② ・$y=y_0\in[c,d]$ を固定したとき，$f(x,y_0)$ が $x\in[a,b]$ で x の関数として積分可能

$$\Longrightarrow \iint_I f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\underbrace{\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)}_{y\text{の関数}}dy. \quad (5.2)$$

（p.187）
注意 式(5.1)の右辺は
$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy,$$
式(5.2)の右辺は
$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dy$$
と表されることもある．

(積分の順序交換)

系5.2 (p.189) $f(x,y)$: 有界閉区間 $I=[a,b]\times[c,d]$ で連続

$$\Rightarrow \iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$
$$= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

□

系5.1 (変数分離形) (p.187)

$f(x)$: $[a,b]$ で定義，有界，積分可能．
$g(y)$: $[c,d]$ で定義，有界，積分可能．

このとき，関数 $f(x)g(y)$ は閉区間 $I=[a,b]\times[c,d]$ で積分可能で，次の公式が成り立つ．

$$\iint_I f(x)\,g(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

注意 上の公式が成り立つのは，積分領域が有界閉区間の場合のみ．

□

例題5.3 (変数分離形)

$I=[0,2]\times[1,3]$ のとき，

$$\iint_I x^2 y\,dx\,dy$$

を求めよ．

① $$I=\int_0^2\left(\int_1^3 x^2 y\,dy\right)dx$$
$$=\int_0^2 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\cdot 8\,dx$$
$$=4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}\cdot 8 = \frac{32}{3}.$$

② $I = \int_1^3 \left(\int_0^2 x^2 y \, dx \right) dy$

$= \int_1^3 y \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 dy = \frac{1}{3} \int_1^3 y \cdot 8 \, dy$

$= \frac{8}{3} \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^3 = \frac{4}{3} \left[y^2 \right]_1^3 = \frac{4}{3}(9-1)$

$= \frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{32}{3}$.

③ $I = \left(\int_0^2 x^2 \, dx \right) \left(\int_1^3 y \, dy \right)$

$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^3 = \frac{1}{6} \left[x^3 \right]_0^2 \cdot \left[y^2 \right]_1^3$

$= \frac{1}{\cancel{6}_3} \cdot \cancel{8}_4 \cdot (9-1) = \frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{32}{3}$.

例題5.4 (改題)。 ← 系5.2 の例題.

$I = [0,2] \times [1,3]$ のとき、

$$\iint_I (x+y)x \, dx\,dy$$

を求めよ。

① $I = \int_0^2 \left(\int_1^3 (x+y)x \, dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_1^3 (x^2+xy) \, dy \right) dx$

$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{x}{2} y^2 \right]_1^3 dx$

$= \int_0^2 \left((3-1)x^2 + \frac{x}{2}(9-1) \right) dx$

$= \int_0^2 (2x^2 + 4x) \, dx = 2 \int_0^2 (x^2 + 2x) \, dx$

$= 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = 2 \cdot \left(\frac{8}{3} + 4 \right)$

$= 2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{40}{3}$.

② $I = \int_1^3 \left(\int_0^2 (x+y)x \, dx \right) dy = \int_1^3 \left(\int_0^2 (x^2+xy) \, dx \right) dy$

$= \int_1^3 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{y}{2} x^2 \right]_0^2 dy$

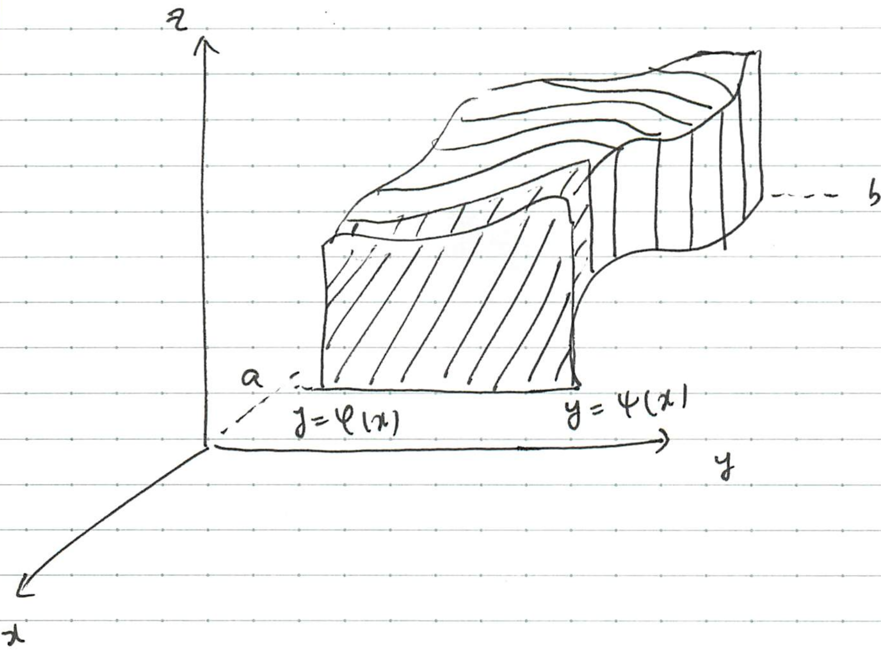
$$= \int_1^3 \left(\frac{8}{3} + 2y\right) dy = \left[\frac{8}{3}y + y^2\right]_1^3$$

$$= (8 + 9) - \left(\frac{8}{3} + 1\right) = 17 - \frac{11}{3}$$

$$= \frac{51 - 11}{3} = \frac{40}{3}.$$

(2)

⊘ 縦線形集合上の累次積分.

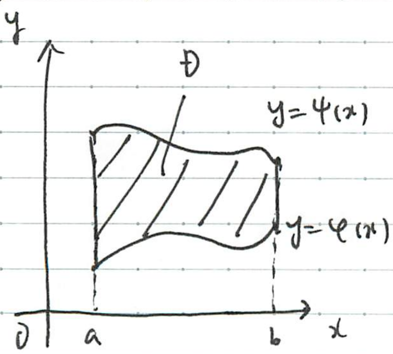


アイデア

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$.
- 積分領域の x 座標は閉区間 $[a, b]$.
- y 座標は x の値に応じて $[\varphi(x), \psi(x)]$ の間を変動する.

定義 (縦線形集合) (p.181)

① $\varphi(x)$, $\psi(x)$: $[a, b]$ で連続かつ $\varphi(x) \le \psi(x)$.

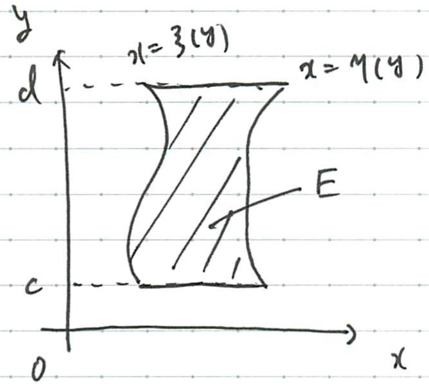


$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$

を y についての縦線形集合という.

☆ D は有界で Jordan 可測.

② $\xi(y)$, $\eta(y)$: $[c, d]$ で連続. かつ $\xi(y) \leq \eta(y)$.



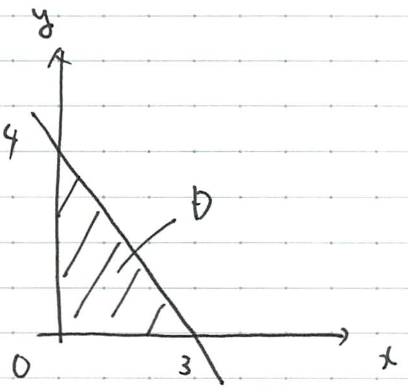
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \xi(y) \leq x \leq \eta(y)\}$$

を xについての縦線形集合という.

※ E は有界で Jordan 可測.

∎

例



$y = 4 - \frac{4}{3}x$

$\Leftrightarrow \quad x = 3 - \frac{3}{4}y$

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 4 - \tfrac{4}{3}x\}$$

は yについての縦線形集合.

また,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4,\ 0 \leq x \leq 3 - \tfrac{3}{4}y\}$$

は xについての縦線形集合でもある.

∎

定理5.9 (p. 182)

$\begin{cases} D \subset \mathbb{R}^2 \text{ が (x または y についての) 縦線形集合.} \\ f(x, y) \text{ が } D \text{ において連続} \end{cases}$

$\Longrightarrow$ $f(x, y)$ は D においてリーマン積分可能.

∎

定理 5.12, 5.13 (p. 190, 191)

(1) yについての縦線形集合

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

において連続な関数 $f(x,y)$ に対して

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \underbrace{\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)}_{x\text{の関数}} dx$$

が成り立つ.

(2) xについての縦線形集合

$$E = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d,\ \xi(y) \leq x \leq \eta(y)\}$$

において連続な関数 $f(x,y)$ に対して

$$\iint_{\cancel{D}\,E} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \underbrace{\left(\int_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x,y)\,dx\right)}_{y\text{の関数}} dy$$

が成り立つ. □

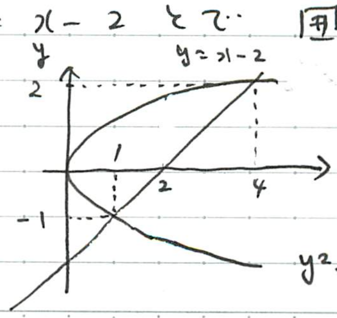
◎ 積分の順序交換.

★ 積分領域 D を「yについての縦線形集合」として見るか、あるいは「xについての縦線形集合」として見るかで、積分の順序を変える.

例題 5.6 (p.191)

D: $y^2 = x$ (曲線) と $y = x - 2$ (直線) とで囲まれた閉領域.

$\Leftrightarrow x = y + 2$



$y^2 = x \Leftrightarrow y = \sqrt{x}\ (y \geq 0)$

$y = -\sqrt{x}\ (y \leq 0)$

① Dをxについての縦線形集合として表す.

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 2,\ y^2 \leq x \leq y+2\}$$

$$\therefore \iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_{-1}^{2}\left(\int_{y^2}^{y+2} f(x, y)\,dx\right)dy.$$

② Dをyについての縦線形集合として表す.

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\} \cup \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 4,\ x-2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$\therefore \iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\right)dx + \int_1^4\left(\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\right)dx.$$