① Dを xについての縦線形集合として表す.

$$D = \{(x,y) \mid -1 \leq y \leq 2,\quad y^2 \leq x \leq y+2\}$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{2}\left(\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

② Dをyについての縦線形集合として表す.

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\quad -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 4,\quad x-2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right)dx$$
$$+ \int_1^4\left(\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

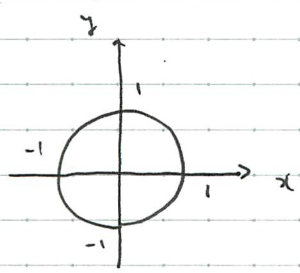
1/22

◎ 重積分の変数変換 (§5.8, p.147−)

• 積分領域の変数変換の例

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy.$$

$$A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}.$$



yについての縦線形集合とみると

$$A = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

よって累次積分は

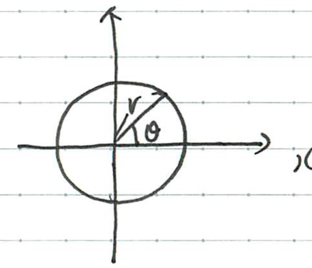
$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

となる.

2 のとき、Aを極座標で表すと

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ より

$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1\}$



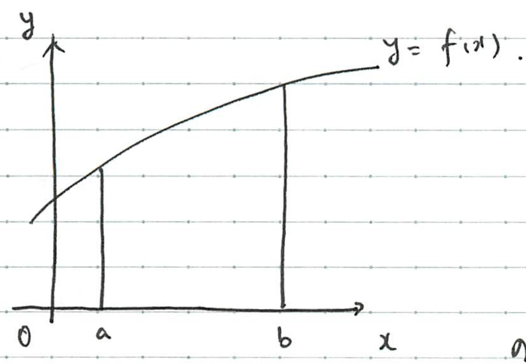
このとき、累次積分は

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \times ▨\, dr \right) d\theta .$$

変数変換により、ある量▨をかける必要性が生ずる。一般に▨は定数だったり、(r, θ)の関数だったりする（変数変換に依存する）。

この▨を、変数変換の係数に応じて適切に表すのがこのセクションの主な内容。

- 1変数の積分における変数変換（復習）　skip



$$\int_a^b f(x)\, dx .$$

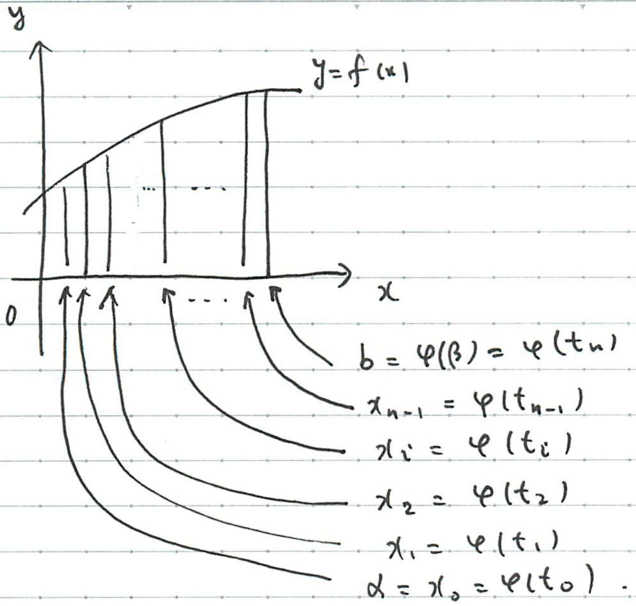
$x = \varphi(t)$.

t	$\alpha \to \beta$
x	$a \to b$

のとき、

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt .$$

この公式の導出。



これにより
閉区間 $[a, b]$ の分割 が
それぞれ 閉区間 $[\alpha, \beta]$ の
分割に対応する.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a = x_0 & < & x_1 & < & x_2 & < \cdots < & x_i & < \cdots < & x_{n-1} & < & x_n = b. \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\alpha = \varphi(t_0) & & \varphi(t_1) & & \varphi(t_2) & & \varphi(t_i) & & \varphi(t_{n-1}) & & \varphi(t_n) = \beta.
\end{array}
$$

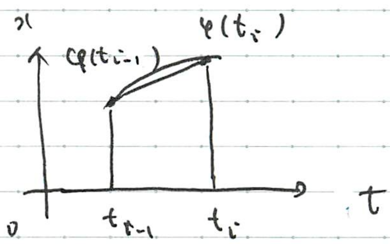
このとき,

$$
\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \underset{\varphi(t_i)}{\underset{\|}{f(x_i)}} \, (\underset{\varphi(t_i)}{\underset{\|}{x_i}} - \underset{\varphi(t_{i-1})}{\underset{\|}{x_{i-1}}})
$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(t_i)) \left(\underline{\varphi(t_i)} - \varphi(t_{i-1}) \right)
$$

1次近似を行うと

$$
\varphi(t_i) \simeq \varphi(t_{i-1}) + \varphi'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})
$$



$$
\therefore (\text{与式}) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(t_i)) \left(\varphi(t_{i-1}) + \varphi'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) - \varphi(t_{i-1}) \right)
$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(t_i))\, \varphi'(t_{i-1})\, (t_i - t_{i-1})
$$

これは t の関数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ のリーマン和なので, 分割を細かくすることにより,

$$
\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \quad \text{が成り立つ.}
$$

skip↓

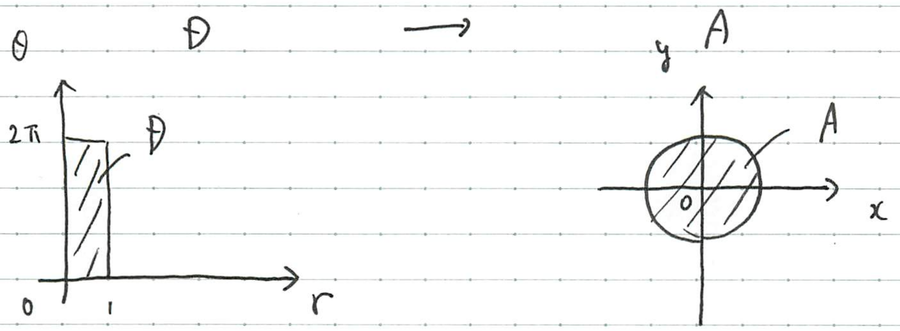
• 2変数の場合.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\ ▨\ du\,dv.$$

変数変換 : Φ : $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$

積分領域 : A (xy平面) $\longleftrightarrow$ D (uv平面).
1対1の対応.

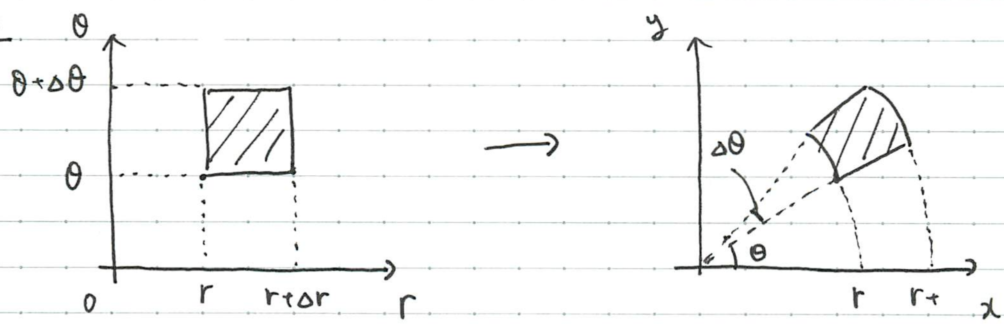
例 $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$.
$D = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1\}$
Φ : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.



(1) ↓
(2) ↓

ここで、D内の微小な領域をΦでA内に写したとき、その面積はどのように変化するか?

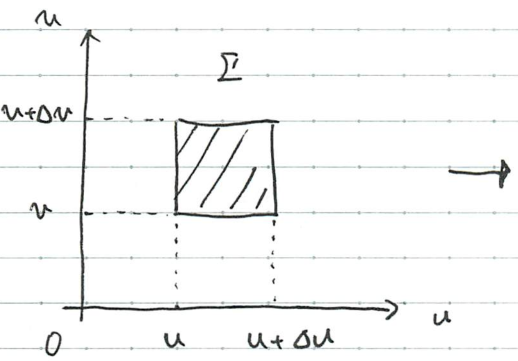
上の例

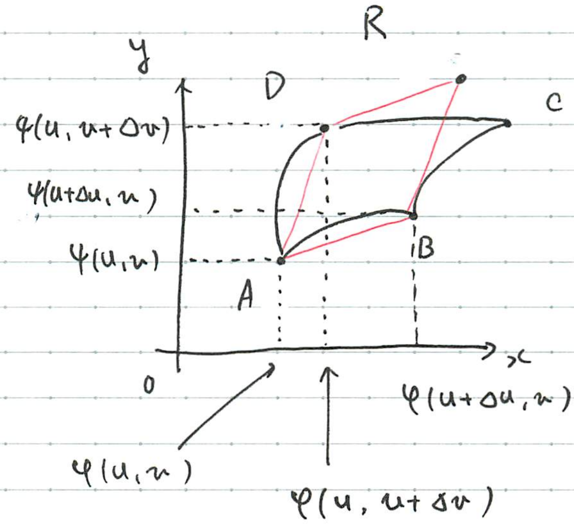


面積 : $\Delta r\cdot\Delta\theta$ $\longrightarrow$ 面積は? $\to \Delta x\cdot\Delta y$

↓ 注 p.161, 図4.14

一般には





uv平面上の微小領域 Σ が、変により、
xy平面上の微小領域 R に写される。

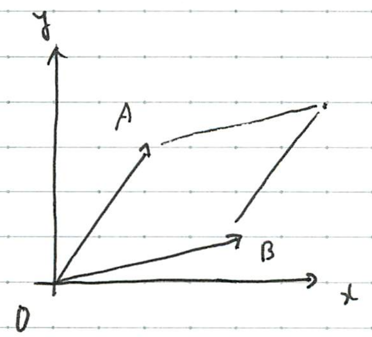
このとき、Rの面積に関する次の事実を用いる。

事実　Δu, Δv が十分小さいとき、Rの面積は、$\overline{AB}$, $\overline{AD}$ を
隣りあう2辺とする平行四辺形の面積で、
十分よく近似できる。 ▨
（上図の赤線部）

そこで、上図(右)の平行四辺形の面積を求めればよいことに
なるが、それを求めるには次の命題を用いればよい。

命題　xy平面に、

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$: 原点 O を始点とする
ベクトルをとる。



このとき、$\overline{OA}$, $\overline{OB}$ を隣りあう
2辺とする平行四辺形の面積は

$$|ac-bd| = \left|\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right|.$$

（行列式の絶対値）

▨

そこで，上の命題を用いて，前頁の図の平行四辺形の面積を求める：

$$\overrightarrow{AD} = \left(\begin{array}{l} \varphi(u, v+\Delta v) - \varphi(u,v) \\ \psi(u, v+\Delta v) - \psi(u,v) \end{array}\right), \quad \begin{array}{l} \text{——①} \\ \text{——②} \end{array}$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(\begin{array}{l} \varphi(u+\Delta u, v) - \varphi(u,v) \\ \psi(u+\Delta u, v) - \psi(u,v) \end{array}\right). \quad \begin{array}{l} \text{——③} \\ \text{——④} \end{array}$$

ここで　$\varphi(u, v+\Delta v)$　を v について一次近似すると

$$\varphi(u, v+\Delta v) \simeq \varphi(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\,\Delta v .$$

∴ ①は　$\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\,\Delta v$　と近似できる．同様にして

②は　$\dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)\,\Delta v$，

③は　$\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\,\Delta u$，

④は　$\dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)\,\Delta u$

と近似されるので，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ は以下のように近似できる：

$$\overrightarrow{AB} \simeq \Delta u \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} \simeq \Delta v \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

したがって，▱ABCD の面積は以下のように近似できる：

$$\Delta u \cdot \Delta v \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \right| .$$

この行列式を，変数変換 $\Phi : x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v)$ のヤコビアン (Jacobian) と呼び，$J_\Phi(u,v)$ で表す．
また，$x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ を $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ で表し，$J_\Phi(u,v)$ を $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ と表すこともある．

定理 5.16　O : $\mathbb{R}^2$ の空でない開集合．
$D \subset O$: 有界開集合．

写像 $\Phi : O \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(u, v) \longmapsto (\varphi(u,v), \psi(u,v)),$$

φ, ψ はそれぞれ O において C^1 級．
Φ のヤコビアンを $J\Phi$ で表す：

$$J\Phi(u,v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

D, Φ について次の2つが成り立つと仮定：

(1) D, $\Phi(D)$ はそれぞれ Jordan 可測．
(2) Jordan 外測度が 0 となるような D の部分集合を除いて，$J\Phi(u,v) \neq 0$ かつ Φ は 1対1．

このとき，$\Phi(D)$ 上の連続関数 $f(x,y)$ に対して

$$\iint_{\Phi D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} f(\varphi(x,y), \psi(x,y))\,|J\Phi(u,v)|\,du\,dv$$

が成り立つ．　$\blacksquare$

変数変換の公式の例　(§5.9)

① 極座標変換　$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$　$(r \geqq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$．

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r.$$

よって $dx\,dy = |r|\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$.