定理 5.16　O : $\mathbb{R}^2$ の空でない開集合.
$D \subset O$: 有界開集合.

写像 $\Phi : O \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(u,v) \longmapsto (\varphi(u,v), \psi(u,v)),$$

φ, ψ はともに O において C^1 級.

Φ のヤコビアンを $J\Phi$ で表す:

$$J\Phi(u,v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

D, Φ について次の2つが成り立つと仮定:

(1) D, $\Phi(D)$ はともに Jordan 可測.
(2) Jordan 外測度が 0 となるような D の部分集合を除いて $J\Phi(u,v) \neq 0$ かつ Φ は 1対1.

このとき, $\Phi(D)$ 上の連続関数 $f(x,y)$ に対して

$$\iint_{\Phi D} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D} f(\varphi(x,y), \psi(x,y))\, |J\Phi(u,v)|\, du\, dv$$

が成り立つ. ∎

1/29

◎ 変数変換の公式の例 (§5.9)

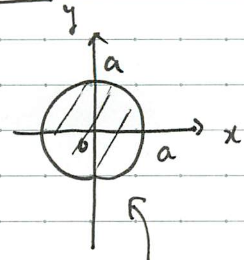
① 極座標変換　$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geqq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r.$$

よって　$dx\,dy = |r|\, dr\, d\theta = r\, dr\, d\theta$.

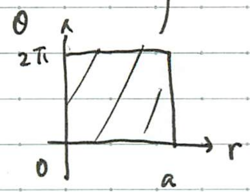
例1 半径 a ($a>0$) の円の面積.



$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\}$ のとき.

$$\underset{\uparrow}{\mu(D)} = \iint_D 1 \cdot dx\,dy.$$

D の面積



極座標では $E = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

を $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で移したもの に対応するので

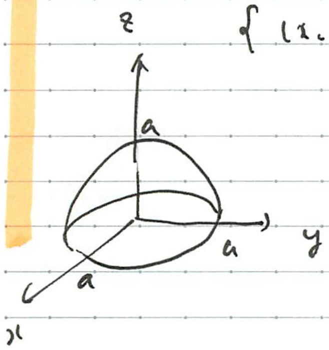
$$\mu(D) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r\,dr\right)d\theta$$

$$= \left(\int_0^a r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right) = \frac{a^2}{2}\cdot 2\pi = \pi a^2.$$ 図

例2 半径 $a>0$ の球の体積.

xyz 空間内で、原点中心、半径 a の球:

$\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$.



対称性より、$\underline{z>0 \text{ の範囲}}$ の体積を2倍すればよい.

$$\| \quad z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\}$ に対し

$$V = 2\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$ を求める.

極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により

$$2\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{a^2-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\,d\theta = 2\left(\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)$$

また. $\displaystyle\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr = -\frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,(-2r\,dr)$

$\displaystyle = -\frac{1}{3}\left[(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}$ より.

求める体積は $\displaystyle 2\cdot\frac{a^3}{3}\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi a^3$. □

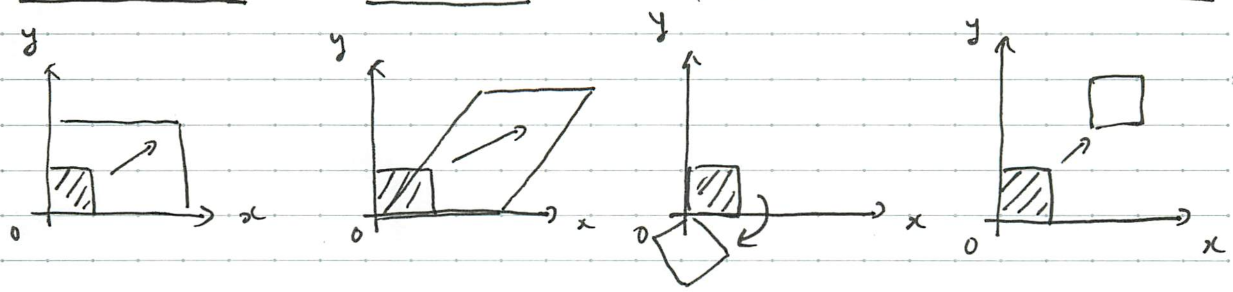
② アフィン変換. $\begin{cases} x = au + bv + t_x . \\ y = cu + dv + t_y . \end{cases}$

⇕

線形変換 + 平行移動.

↑

拡大・縮小　　せん断　　回転　　平行移動



線形変換. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$. $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

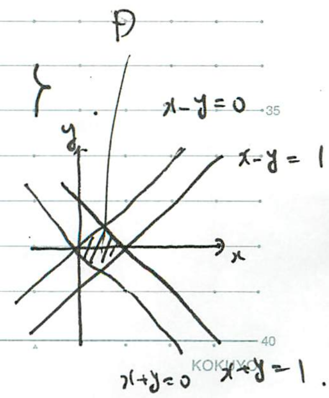
← 平行移動.

$\longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ とまとめることができる.

例題 5.13 (p. 204)

$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x+y \leq 1,\ 0 \leq x-y \leq 1\}$.

$$\iint_D \frac{x-y}{1+x+y}\,dx\,dy$$ を求める.



(2)

$u = x+y$, $v = x-y$ と変数変換する。

このとき、積分領域は $A = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$

また $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$ で表されるので、

D上の点はA上の点に1対1に移る。

ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

よって

$$\iint_D \frac{x-y}{1+x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{v}{1+u} \left| -\frac{1}{2} \right| du \right) dv$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{du}{1+u} \right) \left(\int_0^1 v\,dv \right)$$

$$= \frac{1}{2} \Big[\log(1+u) \Big]_0^1 \cdot \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1$$

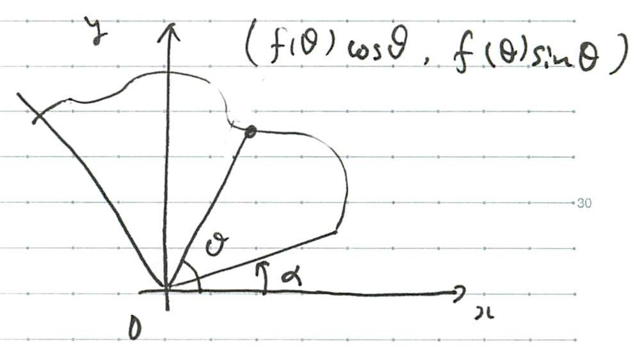
$$= \frac{1}{4} \log 2.$$

□

◎ 極形式で表される曲線の囲む面積。

$f(\theta)$: C^1級.

$[\alpha, \beta]$ において $f(\theta) \ge 0$,



$x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$
$(\alpha \le \theta \le \beta)$

で表される曲線を 極形式 $r = f(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$
で表される曲線という。

(p.205)

定理5.17
$$\begin{cases} \text{曲線} & r = r(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta) \\ \text{直線} & \theta = \alpha, \quad \theta = \beta \end{cases}$$

で囲まれる部分 D の面積 S は $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2 \, d\theta$.

Proof 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

を用いて、積分領域 $D = \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; 0 \leq r \leq r(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta \right\}$

となるから

$$S = \mu(D) = \iint_D 1 \, dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{r(\theta)} r \, dr \right) d\theta$$

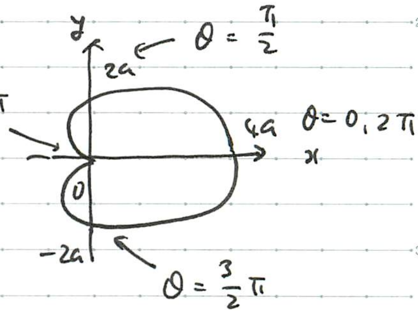
$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=r(\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2 \, d\theta.$$

∎

例題5.15 (p.205) カーディオイド

$r = 2a(1+\cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$

で囲まれる図形 D の面積.



$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2a(1+\cos\theta))^2 \, d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= 2a^2 \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 6\pi a^2.$$

∎

◎ 広義積分.

これまでに習ったリーマン(重)積分:

- 積分領域 D が有界
- 被積分関数 $f(x,y)$ が D で有界.

ここでは次の形の重積分を考える:

[1] 積分領域が有界でない:

(例) $$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

[2] 被積分関数が D で有界でない.

(例) $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$

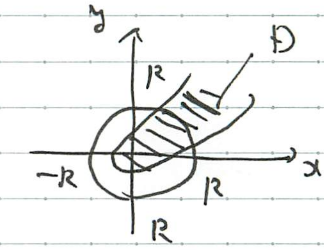
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

・f と D に関する仮定.

$D \subset \mathbb{R}^2$, $D \neq \emptyset$, f: D 上定義.

(I) $\forall R \in \mathbb{R}$ に対し $D \cap \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$ はジョルダン可測.

(II) D に含まれるジョルダン可測な有界閉集合 K を任意にとったとき f は K 上リーマン積分可能.



・広義積分の定義.

(1) $\forall (x,y) \in D \quad f(x,y) \geqq \cancel{D}\ 0$.

(fが積分領域Dにおいて非負)

上限

$$\sup\left\{ \iint_K f(x,y)\,dx\,dy \;\middle|\; \begin{array}{l} K \subset D: \\ \text{ジョルダン可測, 有界閉集合} \end{array} \right\}$$

が有限の値として定まるとき. 広義積分

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$ は収束するという.

(2) fが一般の場合.

関数 $f_\pm(x,y)$ を次で定義:

$$f_+(x,y) := \max\{f_+(x,y), 0\}.$$

$$f_-(x,y) := \max\{-f_-(x,y), 0\}.$$

f_+, f_- はそれぞれ非負. $f = f_+ - f_-$.

このとき, f_+, f_- の D上の広義積分が(1)の意味で収束

$\Rightarrow$ fの広義積分を

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := \iint_D f_+(x,y)\,dx\,dy \cancel{- \iint_D f_+(x,y)\,dx\,dy} - \iint_D f_-(x,y)\,dx\,dy.$$

と定める. □

• コンパクト近似列.

<u>定義</u> $A \subset \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$ に対し. 集合の列 $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ が A のコンパクト近似列

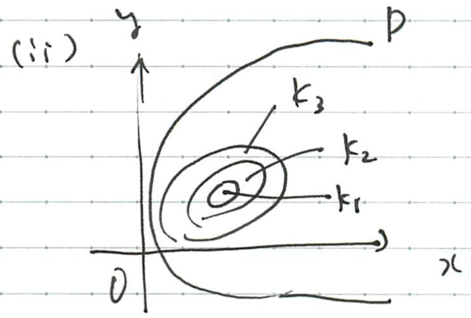
def
$\Longleftrightarrow$ (i) K_m は A に含まれるジョルダン可測な有界閉集合. $(m=1,2,\dots)$

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}$ $K_m \subset K_{m+1}$.

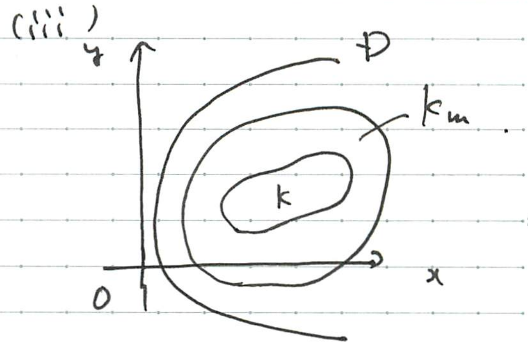
(iii) $\forall K \subset A$, K: 有界閉集合 に対し. $\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $K \subset K_m$.

□

(ii)



(iii)



□

<u>定理</u> $D \subset \mathbb{R}^2$, $D \neq \emptyset$. f: D上定義 が p.85 の条件 (I) (II) をみたすとする. このとき, 次の (a), (b) は同値.

(a) 広義積分 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ は収束.

(b) D のコンパクト近似列 $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ で,

$\lim_{m\to\infty} \iint_{K_m} |f(x,y)|\,dxdy$ が するような

ものが存在する. (a), (b) が成り立つとき.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{m\to\infty} f(x,y)\,dxdy.$$

□

☆ 広義積分 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の求め方.

D のコンパクト近似列 $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ をとって.

$\lim_{m\to\infty} \iint_{K_m} f(x,y)\,dxdy$ を求める.