$u = x+y$, $v = x-y$ と変数変換する. (12)

このとき、積分領域は $A = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1\}$

また $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$ で表されるので、

D上の点はA上の点に1対1に移る.

ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

よって

$$\iint_D \frac{x-y}{1+x+y}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{v}{1+u} \left| -\frac{1}{2} \right| du \right) dv$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{du}{1+u} \right) \left(\int_0^1 v\,dv \right)$$

$$= \frac{1}{2} \Big[\log(1+u) \Big]_0^1 \cdot \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1$$

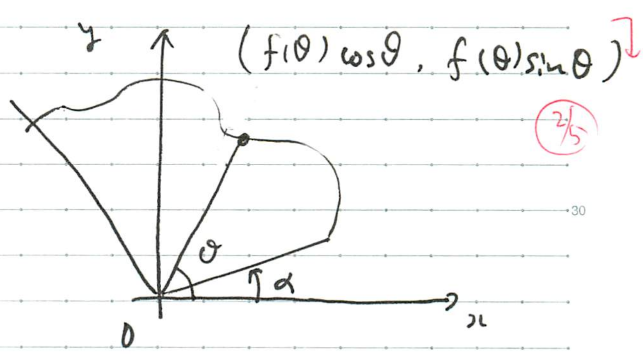
$$= \frac{1}{4} \log 2.$$

□

② 極形式で表される曲線の囲む面積.

$f(\theta)$: C^1級.

$[\alpha, \beta]$ において $f(\theta) \geqq 0$,



$x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$
$(\alpha \leq \theta \leq \beta)$

で表される曲線を極形式 $r = f(\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ で表される曲線という.

定理 5.17 (p.205)

$$\begin{cases} \text{曲線} & r = r(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta) \\ \text{直線} & \theta = \alpha, \quad \theta = \beta \end{cases}$$

で囲まれる部分 D の面積 S は $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\, d\theta$.

Proof 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

を用いて、積分領域 $D = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq r(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$

となるから

$$S = \mu(D) = \iint_D 1\, dxdy = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{r(\theta)} r\, dr \right) d\theta$$

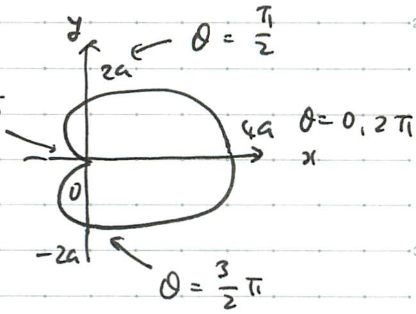
$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=r(\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\, d\theta.$$

∎

例題 5.15 (p.205) カージオイド

$r = 2a(1+\cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$

で囲まれる図形 D の面積.



$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2a(1+\cos\theta))^2\, d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 2a^2 \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 6\pi a^2.$$

∎

☆ 広義積分 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ の求め方.

D のコンパクト近似列 $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ をとって.

$\lim_{m\to\infty}\iint_{K_m} f(x,y)\,dx\,dy$ を求める.

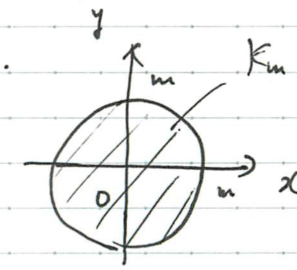
◎ 広義積分の計算例.

例題 5.17　$I=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

↑ 全平面.

$m\in\mathbb{N}$ に対し, $K_m=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le m^2\}$

とおくと, $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト近似列.



$I_m=\iint_{K_m} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ とおいて

I_m を求める.

極座標変換: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r\geqq 0,\ \theta\in\mathbb{R})$
により,

$$I_m=\int_0^{2\pi}\int_0^m e^{-((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^m re^{-r^2}\,dr\,d\theta=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\underbrace{\left(\int_0^m e^{-r^2}(-2r\,dr)\right)}_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left[e^{-r^2}\right]_0^m$$

$$=-\pi\left(e^{-m^2}-1\right)=\pi\left(1-e^{-m^2}\right).$$

$$\therefore\ I=\lim_{m\to\infty}I_m=\lim_{m\to\infty}\pi\left(1-e^{-m^2}\right)=\pi.$$

☒

例題 5.18 $J=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$. （例題 5.17 を用いる）

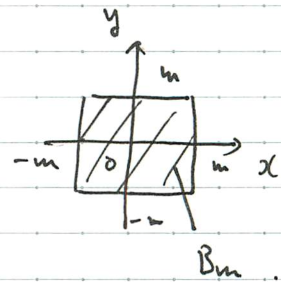
$$J^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right).$$

$J_m = \int_{-m}^{m} e^{-x^2}dx$ とおくと

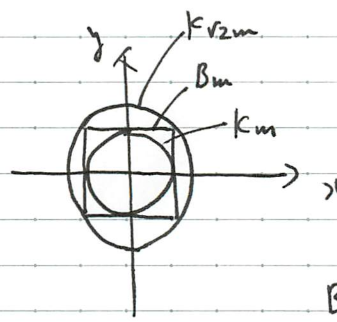
$$J_m^2 = \left(\int_{-m}^{m} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-m}^{m} e^{-y^2}dy\right)$$

$$= \int_{-m}^{m}\left(\int_{-m}^{m} e^{-x^2-y^2}dy\right)dx$$

$$= \iint_{B_m} e^{-x^2-y^2}dy\,dx.$$



ただし $B_m = [-m, m]\times[m, m]$.



B_m の内接円：$K_m = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le m^2\}$.

B_m の外接円：$K_{\sqrt{2}m} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2m^2\}$.

このとき
$$\underbrace{\iint_{K_m} e^{-x^2-y^2}dx\,dy}_{=\ \pi(1-e^{-m^2})} \le (J_m)^2 \le \underbrace{\iint_{K_{\sqrt{2}m}} e^{-x^2-y^2}dx\,dy}_{=\ \pi(1-e^{-2m^2})}$$

$m\to\infty$ とすると

$$\lim_{m\to\infty}\pi(1-e^{-m^2}) \le J^2 \le \lim_{m\to\infty}\pi(1-e^{-2m^2}).$$

はさみうちの原理より $J^2=\pi$. $\therefore J=\sqrt{\pi}$. ▨