▨ Horner 法のアルゴリズムと計算量.

__アルゴリズム__ （Horner 法）

__入力__ $a(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $x_0 \in \mathbb{Z}$.
__出力__ $y = a(x_0) \in \mathbb{Z}$.

ループ n 回

```
y ← a_n;
for i ∈ [n-1..0]   do  y ← y·x_0 + a_i;
return y;
```

乗算1回　加算1回 ▨

全体の演算回数は $\Theta(n)$. … (☆)の $\Theta(n^2)$に比べ、大分小さくなっている!
（現時点で多倍長整数の乗算の計算量を評価していないことに注意.）

6/1

2.2.3 非負整数の2進・10進変換.

6/8

＊Horner 法のアイデアで効率化できる.

▨ 2進表記 → 10進表記.（整数）

__例__ $m = 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\ 2^6 & + & 2^4 + & 2^3 & + & 2^1 + & 2^0 \end{array}$$

$$\overset{\shortparallel}{64} + 16 + 8 + 2 + 1 = 91.$$

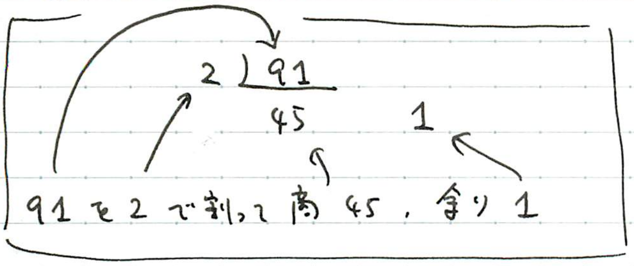
これは、、

$$M(x) = 1\cdot x^6 + \overset{0\cdot x^5 +}{\vee} 1\cdot x^4 + 1\cdot x^3 + \overset{0\cdot x^2 +}{\vee} 1\cdot x + 1$$

において、$M(2)$を求める計算と同値.
そこで、$M(2)$の計算に Horner 法を用いると、次のように計算される.

$$\begin{aligned} M(2) &= (((((\overset{a_6}{1}\cdot 2 + \overset{a_5}{0})2 + \overset{a_4}{1})2 + \overset{a_3}{1})2 + \overset{a_2}{0})2 + \overset{a_1}{1})2 + \overset{a_0}{1} \\ &= ((((2\cdot 2 + 1)2 + 1)2 + 0)2 + 1)2 + 1 \\ &= ((((5\cdot 2 + 1)2 + 0)2 + 1)2 + 1 \\ &= (((11\cdot 2 + 0)2 + 1)2 + 1 \\ &= ((22\cdot 2 + 1)2 + 1 \\ &= 45\cdot 2 + 1 \qquad = 91. \end{aligned}$$

▨ 10進表記 → 2進表記.　(整数)

①


②
← これを, 商が 0 になるまで くり返す

例)

$$\begin{array}{r|l} 2 \,)\, 91 & 1 \\ 2 \,)\, 45 & 1 \\ 2 \,)\, 22 & 0 \\ 2 \,)\, 11 & 1 \\ 2 \,)\, 5 & 1 \\ 2 \,)\, 2 & 0 \\ 2 \,)\, 1 & 1 \\ 0 & \end{array}$$

③

余りを下の方の数から順に左から並べる.

$\boxed{1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1}$

91の 2進表記が 完成!

上の計算の意味

$$\begin{aligned} 91 &= 45\cdot 2 + 1 \\ &= (22\cdot 2+1)2+1 \\ &= ((11\cdot 2+0)2+1)2+1 \\ &= (((5\cdot 2+1)2+0)2+1)2+1 \\ &= ((((2\cdot 2+1)2+1)2+0)2+1)2+1. \\ &= (((((\underset{a_6}{\underline{1}}\cdot 2+\underset{a_5}{\underline{0}})2+\underset{a_4}{\underline{1}})2+\underset{a_3}{\underline{1}})2+\underset{a_2}{\underline{0}})2+\underset{a_1}{\underline{1}})2+\underset{a_0}{\underline{1}}. \end{aligned}$$

2.2.4 小数, 分数の 2進・10進変換.

▨ 2進循環小数 → 有理数表現. (10進数).

… その前に. 10進循環小数 → 有理数表現の復習.

例) $a = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

★ 循環する部分)を 整数部に持ってくる.

aを10^n倍して

(循環節)

$$\begin{array}{rrl} & 10^6 a = & 142857.\ 142857\ 142857 \cdots \\ - & a = & 0.\ 142857\ 142857 \cdots \\ \hline & 999999a = & 142857 \end{array}$$

$$\therefore \quad a = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}.$$

▨

循環小数が2進表記の場合も、計算方法は同様。

例) $a = 0.0\dot{0}01\dot{1}$

☆ 循環節を小数点のすぐ下に持ってくる。

$$a = \frac{1}{2} \times \underbrace{0.\dot{0}01\dot{1}}_{=:b\ とおく.}$$

$$b = 0.\dot{0}01\dot{1}$$

☆ bを 2^4 倍して、循環節を整数部に持ってくる。

$$\begin{array}{rrl} & 2^4 b = & 11.0011\ 0011 \cdots \\ - & b = & 0.0011\ 0011 \cdots \\ \hline \end{array}$$

$$(2^4-1)_{10} b = (11)_2 = (3)_{10}.$$

$$\therefore \quad b = \frac{3}{2^4-1} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

$$\therefore \quad a = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

▨

DATE 5 31 2015

⑭ 整数以外の数値 ⟶ 2進 、表記．

$x \in \mathbb{R}$ のとき．．

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$$

$\lfloor x \rfloor$ ↑ 整数部分 → 2進表記 : Z

$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0..1)$

（小数部分）→ 2進表記 : p

★ ここでは、小数部分の2進表記の計算を考える．

とおくと、全体の2進表記は Z.p となる．よって

（整数分部の2進表記は p.21 を参照．）

① $1/10 \times 2 = 1/5 \cdots 0$

$1/5$

$1/10$ を2倍したら $1/5$．1は現れない．

② $4/5 \times 2 = 1 + 3/5 \cdots 1$

$3/5$

1以上になったら1をひく．

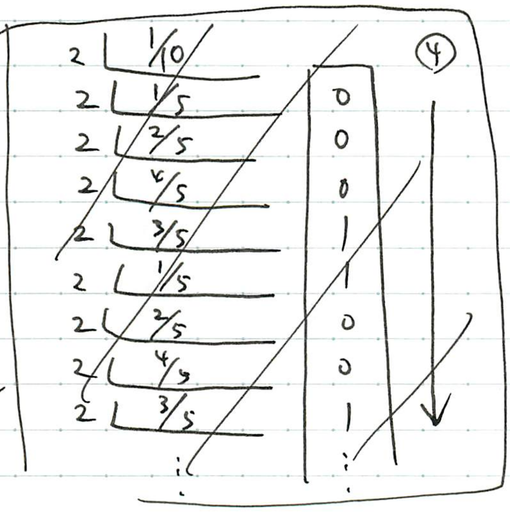
$4/5$ を2倍したら $1 + 3/5$ になった．

③ これを、この部分が0になるか、循環節が現われるまで繰り返す．

NO. 24

DATE 5 . 31 . 2015

例)



右側の数字を上から順に
小数点下に並べる.

0.00011001 …

$$= 0.0\dot{0}01\dot{1}$$

上の計算の意味

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\left(0+\frac{2}{5}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\left(0+\frac{4}{5}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}\right)\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{0}}+\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{0}}+\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{0}}+\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}}+\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}}+\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{0}}+\frac{2}{5}\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

⋮

④

$1/10 \times 2 = 1/5$ ⋯ 0

$1/5 \times 2 = 2/5$ ⋯ 0

$2/5 \times 2 = 4/5$ ⋯ 0

$4/5 \times 2 = 1 + 3/5$ ⋯ 1

$3/5 \times 2 = 1 + 1/5$ ⋯ 1

$1/5 \times 2 = 2/5$ ⋯ 0

$2/5 \times 2 = 4/5$ ⋯ 0

$4/5 \times 2 = 1 + 3/5$ ⋯ 1

⋮ ⋮

NO. 25

DATE 6 8 2015

例題 −91.1 を 2進数で表わせよ.
但し、小数は循環小数で表すが、小数第9位を
0捨1入.
負数は 整数部8桁の2の補数で表す.

$(91)_{10} = (1011011)_2$ (→ p.21)

$(0.1) = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2$ (→ p.23)

より、まず 91.1 を 2進数で表すと.
（整数部 8桁）

$(91.1)_{10} = 01011011.00011001\boxed{1}\cdots$

小数第9位で0捨1入を行うと

$\boxed{01011011.00011010}$

これを、2の補数で表すと

$10100100.111001\overset{1}{\cancel{0}}\overset{0}{\cancel{1}}$

ゆえに、−91.1 の2進表記は

$\underline{10100100.11100110}$.

6/8