

## ④ Horner 法のアルゴリズムと計算量

### Algorithm (Horner's rule)

Input:  $a(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $x_0 \in \mathbb{Z}$ .  
Output:  $y = a(x_0) \in \mathbb{Z}$ .

- (1)  $y \leftarrow a_n$ ;
- (2) for  $i \in [n-1..0]$  do  $y \leftarrow y \cdot x_0 + a_i$ ;
- (3) return  $y$ ;

全体の演算回数は  $\Theta(n)$  … 前回の (\*) に比べて大幅に  
 小さくなっている。  
 (現時点では、多倍長整数の乗算の計算量を評価していない  
 ことに注意。)

### 2.2.3 非負整数の2進・10進変換

\* Horner 法の了行了で効率化できること。

### ④ 2進表記 $\rightarrow$ 10進表記 (整数)

例  $m = (1011011)_2$

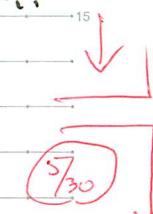
$$\begin{array}{r} \uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow \\ 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = (91)_{10} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow M(x) = 1 \cdot x^6 + 0 \cdot x^5 + 1 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1$$

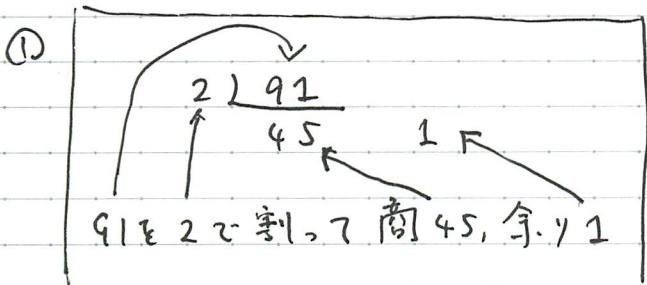
ただし、 $x \leftarrow 2$  とき  $M(2)$  を求めよ。

元々、 $M(2)$  の計算に Horner 法を用いる。

$$\begin{aligned} M(2) &= (((((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= (((((2 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= (((((5 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= (((11 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= ((22 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\ &= 45 \cdot 2 + 1 \\ &= 91. \end{aligned}$$



① 10進表記 → 2進表記 (整数)



② これを、商が0なら  
なぞで繰り返す。

例)

$$\begin{array}{r} 2 \longdiv{91} \\ 2 \longdiv{45} \\ 2 \longdiv{22} \\ 2 \longdiv{11} \\ 2 \longdiv{5} \\ 2 \longdiv{2} \\ 2 \longdiv{1} \\ 0 \end{array}$$

1
1
0
1
1
0
1

③ 余りと下の方の数から順に左から並べる。

$$(1011011)_2 = (91)_{10}$$

$a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$

上の③の計算の意味

$$\begin{aligned}
 91 &= 45 \cdot 2 + 1 \\
 &= (22 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\
 &= ((11 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\
 &= (((5 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\
 &= ((((2 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\
 &= (((((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1
 \end{aligned}$$

$a_6 \quad a_5 \quad a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0$

2.2.4. 小数、分数の2進10進変換

④ 2進循環小数 → 有理数表現 (10進数)

→ 前n. 10進循環小数 → 有理数表現の復習

例)  $a = 0.\overline{142857}$

\* 循環了部分(循環節)を整数部として了。  
 $a_n \cdot 10^n$ 倍して

$$\begin{array}{r} 10^6 a = 142857. \quad 142857 \quad 142857 \dots \\ - 1 \quad a = \underline{0. \quad 142857 \quad 142857 \dots} \\ (10^6 - 1)a = 142857 \\ \parallel \\ 999999 \end{array}$$

$\therefore a = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$ .

5

循環小数が2進表記の場合も計算方法は同様。

例)  $a = (0.0\dot{0}0\dot{1}\dot{1})_2$

① 循環節が小数点以下n桁, なう。

$$a = \frac{1}{2} \times (\underbrace{0.0\dot{0}0\dot{1}\dot{1}}_b)_2 \quad b = (0.\dot{0}0\dot{1}\dot{1})_2$$

$\because b \in \mathbb{N}^*$ .

②  $b$  が  $2^n$  の倍数。循環節が整数部分n桁, なう。

$$\begin{array}{r} 2^4 b = 11. \quad 0011 \quad 0011 \dots \\ - 1 \quad b = \underline{0. \quad 0012 \quad 0011 \dots} \\ (2^4 - 1)_{10} b = (11)_2 = (3)_{10} \end{array}$$

$$\therefore b = \frac{3}{2^4 - 1} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$

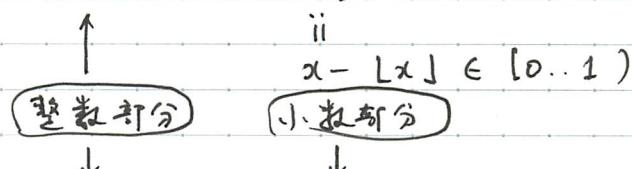
$$a = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

25

③ 10進表記 → 2進表記 (整数以外)

$$x \in \mathbb{R} \text{ のとき}, \quad x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$$

30



$$\text{2進表記: } (z)_2 = (\lfloor x \rfloor)_{10} \quad (p)_2 = (x - \lfloor x \rfloor)_{10},$$

35

$(z)_2$  (整数部分, 2進表記) の計算を上で扱ったのと  
同じく  $(p)_2$  (小数部分, 2進表記) の計算を考えた。

例題)  $(\frac{1}{10})_{10}$  の 2進表記.

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\frac{1}{10} \times 2 = \frac{1}{5} + 0.} \quad \begin{array}{l} \text{最初の} \\ \text{数} 2 \\ \text{を} 2 \\ \text{倍} 1 \\ \text{して} \\ \text{1} \text{を} \\ \text{上} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \boxed{\frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5} + 0.} \quad \begin{array}{l} \text{以下,} \\ \text{右} \\ \text{辺} \\ \text{を} \\ \text{2} \\ \text{倍} \\ \text{して} \\ \text{1} \text{を} \\ \text{上} \end{array}$$

$$\textcircled{3} \quad \boxed{\frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5} + 0.} \quad \begin{array}{l} \text{左} \\ \text{辺} \\ \text{を} \\ \text{1} \\ \text{引} \\ \text{いて} \\ \text{数} \\ \text{を} \\ \text{下} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5} = \frac{3}{5} + 1.} \quad \begin{array}{l} \text{左} \\ \text{辺} \\ \text{を} \\ \text{1} \\ \text{引} \\ \text{いて} \\ \text{数} \\ \text{を} \\ \text{下} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5} = \frac{1}{5} + 1.} \quad \begin{array}{l} \text{左} \\ \text{辺} \\ \text{を} \\ \text{1} \\ \text{引} \\ \text{いて} \\ \text{数} \\ \text{を} \\ \text{下} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5} + 0.} \quad \begin{array}{l} \text{左} \\ \text{辺} \\ \text{を} \\ \text{1} \\ \text{引} \\ \text{いて} \\ \text{数} \\ \text{を} \\ \text{下} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5} + 0.} \quad \begin{array}{l} \text{左} \\ \text{辺} \\ \text{を} \\ \text{1} \\ \text{引} \\ \text{いて} \\ \text{数} \\ \text{を} \\ \text{下} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5} = \frac{3}{5} + 1.} \quad \begin{array}{l} \text{左} \\ \text{辺} \\ \text{を} \\ \text{1} \\ \text{引} \\ \text{いて} \\ \text{数} \\ \text{を} \\ \text{下} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5} = \frac{1}{5} + 1.} \quad \begin{array}{l} \text{左} \\ \text{辺} \\ \text{を} \\ \text{1} \\ \text{引} \\ \text{いて} \\ \text{数} \\ \text{を} \\ \text{下} \end{array}$$

最初の数 2 を 2 倍して  
1 を上回ったので  
切った.

以下、右辺、数位を以て  
2 倍していく.

左辺が 1 を上回った.  
1 を引いて数を以て回す  
2 倍していく.

④ 右辺の値が 1 より  
大きくなったが、循環  
節が出来たので終了.

⑤ 各行の数字を上から順に  
小数点下へ並べた.

$$0.000110011\dots = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2.$$

$$\therefore (\frac{1}{10})_{10} = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2.$$

上の計算の結果:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{2}{5} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{3}{5} \right) \right) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{3}{5} \right) \right) \right) \right) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{3}{5} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{2}{5} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right)$$

(有理数の場合、有限小数)

例題

-91.1 を 2進数で表すと  
但し、小数部分循環小数で表す。小数部分を飛ばして  
0捨て入  
真数部分 整数部 8 打の2の補数で表す。

$$(91)_{10} = (1011011)_2$$

$$(0.1)_{10} = (0.0\overline{011})_2$$

ゆえに  $(91.1)_{10}$  を 2進数で表すと

$$(91.1)_{10} = (01011011.0\overline{011})_2$$

これを2の補数で表すと

$$(-91.1)_{10} = (10100100.1\overline{100})_2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ -2^7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 91.1 + (-91.1) \\ &= (-2^7) + \underbrace{2^6 + 2^5 + \dots + 2^0}_{\frac{1}{2^7-1}} + \underbrace{2^{-1} + 2^{-2} + \dots}_{1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

↓