▨ Horner 法のアルゴリズムと計算量．

Algorithm （Horner's rule）

Inputs: $a(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $x_0 \in \mathbb{Z}$.
Output: $y = a(x_0) \in \mathbb{Z}$.

(1) $y \leftarrow a_n$;
(2) for $i \in [n-1..0]$ do $y \leftarrow y \cdot x_0 + a_i$;
(3) return y;

全体の演算回数は $O(n)$ … 前頁の(☆)に比べて大幅に小さくなっている．

（現時点で，多倍長整数の乗算の計算量を評価していないことに注意．）

5/30

2.2.3 非負整数の2進・10進変換．

☆ Horner 法のアイデアで効率化できる．

▨ 2進表記 ⟶ 10進表記（整数）

例 $m = (1\,0\,1\,1\,0\,1\,1)_2$

$2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = (91)_{10}$.

$\Leftrightarrow$ $M(x) = 1 \cdot x^6 + 0 \cdot x^5 + 1 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1$
に対し，$x \leftarrow 2$ により $M(2)$ を求める．
そこで，$M(2)$ の計算に Horner 法を用いると…

$$
\begin{aligned}
M(2) &= (((((\overset{a_6}{1} \cdot 2 + \overset{a_5}{0})2 + \overset{a_4}{1})2 + \overset{a_3}{1})2 + \overset{a_2}{0})2 + \overset{a_1}{1})2 + \overset{a_0}{1} \\
&= ((((2 \cdot 2 + 1)2 + 1)2 + 0)2 + 1)2 + 1 \\
&= (((5 \cdot 2 + 1)2 + 0)2 + 1)2 + 1 \\
&= ((11 \cdot 2 + 0)2 + 1)2 + 1 \\
&= (22 \cdot 2 + 1)2 + 1 \\
&= 45 \cdot 2 + 1 \\
&= 91.
\end{aligned}
$$

NO. 18

DATE 5・13・2016

◎ 10進表記 ⟶ 2進表記 （整数）

①

$$\begin{array}{r|l} 2 & 91 \\ \hline & 45 \quad 1 \end{array}$$

91を2で割って商45，余り1

② これを，商が0になるまで繰り返す。

例）

$$\begin{array}{r|r|c} 2 & 91 & \\ 2 & 45 & 1 \\ 2 & 22 & 1 \\ 2 & 11 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array}$$

③ 余りを下の方の数から順に左から並べる。

$$(\underset{a_6}{1}\ \underset{a_5}{0}\ \underset{a_4}{1}\ \underset{a_3}{1}\ \underset{a_2}{0}\ \underset{a_1}{1}\ \underset{a_0}{1})_2 = (91)_{10}$$

上の③の計算の意味

$$\begin{aligned} 91 &= 45\cdot 2 + 1 \\ &= (22\cdot 2+1)2+1 \\ &= ((11\cdot 2+0)2+1)2+1 \\ &= (((5\cdot 2+1)2+0)2+1)2+1 \\ &= ((((2\cdot 2+1)2+1)2+0)2+1)2+1 \\ &= (((((\underset{a_6}{\underline{1}}\cdot 2+\underset{a_5}{\underline{0}})2+\underset{a_4}{\underline{1}})2+\underset{a_3}{\underline{1}})2+\underset{a_2}{\underline{0}})2+\underset{a_1}{\underline{1}})2+\underset{a_0}{\underline{1}}. \end{aligned}$$

2.2.4. 小数，分数の2進10進変換

◎ 2進循環小数 ⟶ 有理数表現（10進数）

… その前に，10進循環小数 ⟶ 有理数表現の復習。

例） $a = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

★循環する部分（循環節）を整数部に持ってくる。

aを10^n倍して

KOKUYO

NO. 19

DATE 5・14・2016

$$
\begin{array}{rrl}
 & 10^6 a = & 142857.\ 142857\ 142857 \cdots \\
-) & a = & 0.\ 142857\ 142857 \cdots \\
\hline
 & (10^6-1)a = & 142857
\end{array}
$$

$(10^6-1) = 999999$

$$\therefore\ a = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}.$$

$\blacksquare$

循環小数が2進表記の場合も計算方法は同様。

例) $a = (0.\dot{0}001\dot{1})_2$

① 循環節を小数点のすぐ下に持ってくる。

$a = \frac{1}{2} \times \underbrace{(0.\dot{0}01\dot{1})_2}_{\text{b とおく.}}$　　$b = (0.\dot{0}01\dot{1})_2$.

② bを 2^4 倍して、循環節を整数部に持ってくる。

$$
\begin{array}{rrl}
 & 2^4 b = & 11.\ 0011\ 0011 \cdots \\
-) & b = & 0.\ 0011\ 0011 \cdots \\
\hline
 & (2^4-1)_{10}\, b = & (11)_2 = (3)_{10}.
\end{array}
$$

$$\therefore\ b = \frac{3}{2^4-1} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$

$$a = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

$\blacksquare$

◎ 10進表記 ⟶ 2進表記 (整数レベル)

$x \in \mathbb{R}$ のとき、 $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$

$\lfloor x \rfloor$: 整数部分

$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0..1)$: 小数部分

2進表記: $(z)_2 = (\lfloor x \rfloor)_{10}$　$(p)_2 = (x - \lfloor x \rfloor)_{10}$,

とおくと、 $(x)_{10} = (z.p)_2$.

$(z)_2$(整数部分の2進表記)の計算は上で扱ったので、ここでは $(p)_2$(小数部分の2進表記)の計算を考える。

例) $(1/10)_{10}$ の 2進表記.

① $1/10 \times 2 = 1/5 + 0$

$1/5$

最初の数を2倍して1を上回るかどうかを調べる.

② $1/5 \times 2 = 2/5 + 0$

$2/5 \times 2 = 4/5 + 0$

以下, 右辺の数値を次々に2倍していく.

③ $4/5 \times 2 = 8/5 = 3/5 + 1$.

もし右辺が1を上回ったら, 1を引いた数を次の回で2倍する.

$3/5 \times 2 = 6/5 = 1/5 + 1$

$1/5 \times 2 = 2/5 + 0$

$2/5 \times 2 = 4/5 + 0$

$4/5 \times 2 = 8/5 = 3/5 + 1$

$3/5 \times 2 = 6/5 = 1/5 + 1$

④ 右辺の値が1に等しくなるか, 循環節が出るまで続ける.

⑤ 各桁の数字を上から順に小数点下に並べる.

$0.000\ 1100\ 11\cdots = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2$.

$\therefore\ (1/10)_{10} = (0.\dot{0}01\dot{1})_2$.

上の計算の意味:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{2}{5}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{4}{5}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{5}\right)\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{0} + \frac{1}{2}\left(\underline{0} + \frac{1}{2}\left(\underline{0} + \frac{1}{2}\left(\underline{1} + \frac{1}{2}\left(\underline{1} + \frac{1}{2}\left(\underline{0} + \frac{2}{5}\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

有理数の場合，有限小数か　　　　無理数の場合，

例題　−91.1 を 2進数で表記する。
但し，小数は循環小数で表す。小数第9位を
0捨1入。
負数は整数部8桁の2の補数で表す。

$$(91)_{10} = (1011011)_2.$$

$$(0.1)_{10} = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2.$$

より，まず $(91.1)_{10}$ を 2進数で表すと

$$(91.1)_{10} = (01011011.0\dot{0}01\dot{1})_2.$$

これを2の補数で表すと

$$(-91.1)_{10} = (10100100.1\dot{1}10\dot{0})_2.$$

↑
-2^7

$$91.1 + (-91.1)$$
$$= (-2^7) + \underbrace{2^6 + 2^5 + \cdots + 2^0}_{2^7 - 1} + \underbrace{2^{-1} + 2^{-2} + \cdots}_{\downarrow\ 1.} \to 0.$$