線形代数 I (2013):
行列の行変形

照井 章（筑波大学 数理物質系）

2013 年 5 月 28 日

線形代数 I（化学類対象）

基本行列の定義

基本行列の定義を以下の通り行う。

(1) 行列の第 *j* 行の *c* 倍: multiplyRow[n, j, c]

multiplyRow[n, j, c] --- *n* 次単位行列の 第 *j* 行を *c* 倍する

```
multiplyRow[n_, j_, c_] := ReplacePart[IdentityMatrix[n], {j, j} → c]
```

計算例: 3 次正方行列の第 3 行の 5 倍

```
multiplyRow[3, 3, 5]
```

```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 5}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) 行列の第 *i* 行と第 *j* 行の交換: exchangeRows[n, i, j]

exchangeRows[n, i, j] --- *n* 次単位行列の第 *i* 行と第 *j* 行を入れ換える

```
exchangeRows[n_, i_, j_] :=
 ReplacePart[IdentityMatrix[n], {{i, i} → 0, {i, j} → 1, {j, i} → 1, {j, j} → 0}]
```

計算例: 5 次正方行列の第 3 行と第 5 行の交換

```
exchangeRows[5, 3, 5]
```

```
{{1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 行列の第 *i* 行に第 *j* 行の *c* 倍を加える: rowAdd[n, i, j, c]

rowAdd[n, i, j, c] --- *n* 次単位行列の第 *i* 行に第 *j* 行の *c* 倍を加える

```
rowAdd[n_, i_, j_, c_] := ReplacePart[IdentityMatrix[n], {i, j} → c]
```

計算例: 5 次正方行列の第 4 行に第 2 行の −1 倍を加える

```
rowAdd[5, 4, 2, -1]
```

```
{{1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, -1, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列の行変形による簡約階段行列の変換（教科書 p. 38, 例題 2.1）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を行変形で簡約階段行列に変換する。

最初に行列 A を定義する。

```
A = {{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {6, 5, 4, 3, 2, 1}, {4, 5, 6, 1, 2, 3}}
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {6, 5, 4, 3, 2, 1}, {4, 5, 6, 1, 2, 3}}
```

```
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

第2行に第1行の –6 倍を加える。

```
Q1 = rowAdd[3, 2, 1, -6]
```

```
{{1, 0, 0}, {-6, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

```
MatrixForm[Q1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A1 = Q1.A
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {0, -7, -14, -21, -28, -35}, {4, 5, 6, 1, 2, 3}}
```

```
MatrixForm[A1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -7 & -14 & -21 & -28 & -35 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

第3行に第1行の –4 倍を加える。

```
Q2 = rowAdd[3, 3, 1, -4]
```

```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {-4, 0, 1}}
```

```
MatrixForm[Q2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A2 = Q2.A1
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {0, -7, -14, -21, -28, -35}, {0, -3, -6, -15, -18, -21}}
```

```
MatrixForm[A2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -7 & -14 & -21 & -28 & -35 \\ 0 & -3 & -6 & -15 & -18 & -21 \end{pmatrix}$$

第2行を (–1/7) 倍する。

```
Q3 = multiplyRow[3, 2, (-1 / 7)]
```

$\left\{\{1, 0, 0\}, \left\{0, -\frac{1}{7}, 0\right\}, \{0, 0, 1\}\right\}$

```
MatrixForm[Q3]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A3 = Q3.A2
```

{{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {0, 1, 2, 3, 4, 5}, {0, -3, -6, -15, -18, -21}}

```
MatrixForm[A3]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -15 & -18 & -21 \end{pmatrix}$$

第3行を (–1/3) 倍する。

```
Q4 = multiplyRow[3, 3, (-1 / 3)]
```

$\left\{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \left\{0, 0, -\frac{1}{3}\right\}\right\}$

```
MatrixForm[Q4]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

```
A4 = Q4.A3
```

{{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {0, 1, 2, 3, 4, 5}, {0, 1, 2, 5, 6, 7}}

```
MatrixForm[A4]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

第1行に第2行の –2 倍を加える。

```
Q5 = rowAdd[3, 1, 2, -2]
```

{{1, -2, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

```
MatrixForm[Q5]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A5 = Q5.A4
```

{{1, 0, -1, -2, -3, -4}, {0, 1, 2, 3, 4, 5}, {0, 1, 2, 5, 6, 7}}

```
MatrixForm[A5]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

第3行に第2行の –1 倍を加える。

```
Q6 = rowAdd[3, 3, 2, -1]
```

```
MatrixForm[Q6]
```

```
A6 = Q6.A5
```

```
MatrixForm[A6]
```

第3行を (1/2) 倍する。

```
Q7 = multiplyRow[3, 3, (1 / 2)]
```

```
MatrixForm[Q7]
```

```
A7 = Q7.A6
```

```
MatrixForm[A7]
```

第1行に第3行の 2 倍を加える。

```
Q8 = rowAdd[3, 1, 3, 2]
```

```
MatrixForm[Q8]
```

```
A8 = Q8.A7
```

```
MatrixForm[A8]
```

第2行に第3行の –3 倍を加える。

```
Q9 = rowAdd[3, 2, 3, -3]
```

```
MatrixForm[Q9]
```

```
A9 = Q9.A8
```

```
MatrixForm[A9]
```

これで簡約階段行列が得られた。

ここで、行変形に用いた基本行列の積を Q とおく。

```
Q = Q9.Q8.Q7.Q6.Q5.Q4.Q3.Q2.Q1
```

```
MatrixForm[Q]
```

A に Q を直接左からかけて、上の行変形の結果と等しくなることを確かめる。

```
Q.A // MatrixForm
```

A に Q を直接左からかけて、上の行変形の結果と等しくなることを、行列の引き算で確かめる。

```
Q.A - A9 // MatrixForm
```

Q が正則であることを、逆行列を求めることで確かめる。

```
Inverse[Q]
```

```
Q . Inverse[Q] // MatrixForm
```

正則行列を基本行列の積で表す（教科書 p. 40, 例題 2.2）

正則行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

を基本行列の積で表す。

最初に行列 A を定義する。

```
A = {{1, 2}, {3, 4}}
```

```
MatrixForm[A]
```

第2行に第1行の −3 倍を加える。

```
Q1 = rowAdd[2, 2, 1, -3]
```

```
MatrixForm[Q1]
```

```
A1 = Q1.A
```

```
MatrixForm[A1]
```

第2行を −(1/2) 倍する。

```
Q2 = multiplyRow[2, 2, (-1 / 2)]
```

```
MatrixForm[Q2]
```

```
A2 = Q2.A1
```

```
MatrixForm[A2]
```

第1行に第2行の −2 倍を加える。

```
Q3 = rowAdd[2, 1, 2, -2]
```

```
MatrixForm[Q3]
```

```
A3 = Q3.A2
```

```
MatrixForm[A3]
```

単位行列が得られた。すなわち

$$Q_3\, Q_2\, Q_1\, A = E_2$$

である。よって

$$A = Q_1^{-1}\, Q_2^{-1}\, Q_3^{-1}$$

のはずなので、実際に計算してみると

```
Inverse[Q1] // MatrixForm
```

```
Inverse[Q2] // MatrixForm
```

```
Inverse[Q3] // MatrixForm
```

```
Inverse[Q1].Inverse[Q2].Inverse[Q3] // MatrixForm
```

減算で検算すると

```
Inverse[Q1].Inverse[Q2].Inverse[Q3] - A // MatrixForm
```

となり、たしかに等しい。よって、行列 A を基本行列の積で表したことがわかる。