線形代数 I (2013): 行列式の計算例

照井 章（筑波大学 数理物質系）

2013 年 7 月 5 日

線形代数 I（化学類対象）

基本行列の定義

基本行列の定義を以下の通り行う。

(1) 行列の第 j 行の c 倍: multiplyRow[n, j, c]

multiplyRow[n, j, c] --- n 次単位行列の 第 j 行を c 倍する

```
multiplyRow[n_, j_, c_] := ReplacePart[IdentityMatrix[n], {j, j} → c]
```

(2) 行列の第 i 行と第 j 行の交換: exchangeRows[n, i, j]

exchangeRows[n, i, j] --- n 次単位行列の第 i 行と第 j 行を入れ換える

```
exchangeRows[n_, i_, j_] :=
 ReplacePart[IdentityMatrix[n], {{i, i} → 0, {i, j} → 1, {j, i} → 1, {j, j} → 0}]
```

(3) 行列の第 i 行に第 j 行の c 倍を加える: rowAdd[n, i, j, c]

rowAdd[n, i, j, c] --- n 次単位行列の第 i 行に第 j 行の c 倍を加える

```
rowAdd[n_, i_, j_, c_] := ReplacePart[IdentityMatrix[n], {i, j} → c]
```

行列式の計算例 (I) 4 x 4 行列式

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

に対し det(A) を求める。

```
A = {{4, 2, 0, 1}, {1, 1, 0, 1}, {3, 2, -3, 1}, {5, -5, 3, 2}}
```

```
{{4, 2, 0, 1}, {1, 1, 0, 1}, {3, 2, -3, 1}, {5, -5, 3, 2}}
```

```
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

まず第1列で行消去を行う。
第1列に値が1の成分があれば、第1行に移動させる。その方が行消去の計算が易しいだろう。
今回は、第1行と第2行を交換する。この際、行列式が –1 倍されることに注意する。

```
Q1 = exchangeRows[4, 1, 2]
```

```
{{0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

```
MatrixForm[Q1]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q1 を A の左側からかける。計算結果を A1 とおく。

```
A1 = Q1.A
```

```
{{1, 1, 0, 1}, {4, 2, 0, 1}, {3, 2, -3, 1}, {5, -5, 3, 2}}
```

```
MatrixForm[A1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

以後、(1,1) 成分を用いて (2,1), (3,1), (4,1) 成分を消去する。
第2行に第1行の –4 倍を加える基本行列を Q2 とおく。

```
Q2 = rowAdd[4, 2, 1, -4]
```

```
{{1, 0, 0, 0}, {-4, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

```
MatrixForm[Q2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q2 を A1 の左側からかける。計算結果を A2 とおく。

```
A2 = Q2.A1
```

{{1, 1, 0, 1}, {0, -2, 0, -3}, {3, 2, -3, 1}, {5, -5, 3, 2}}

```
MatrixForm[A2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2,1) 成分の消去が完了。
次に (3,1) 成分を消去する。
第3行に第1行の –3 倍を加える基本行列を Q3 とおく。

```
Q3 = rowAdd[4, 3, 1, -3]
```

{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {-3, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

```
MatrixForm[Q3]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q3 を A2 の左側からかける。計算結果を A3 とおく。

```
A3 = Q3.A2
```

{{1, 1, 0, 1}, {0, -2, 0, -3}, {0, -1, -3, -2}, {5, -5, 3, 2}}

```
MatrixForm[A3]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 5 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(3,1) 成分の消去が完了。
次に (4,1) 成分を消去する。
第4行に第1行の –5 倍を加える基本行列を Q4 とおく。

```
Q4 = rowAdd[4, 4, 1, -5]
```

{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {-5, 0, 0, 1}}

```
MatrixForm[Q4]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q4 を A3 の左側からかける。計算結果を A4 とおく。

```
A4 = Q4.A3
```

{{1, 1, 0, 1}, {0, -2, 0, -3}, {0, -1, -3, -2}, {0, -10, 3, -3}}

```
MatrixForm[A4]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -10 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(4,1) 成分の消去が完了。

以上より $\det(A) = -1 \times \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \\ -10 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ となる。

右下のブロックを B とおく。

```
B = {{-2, 0, -3}, {-1, -3, -2}, {-10, 3, -3}}
```

```
{{-2, 0, -3}, {-1, -3, -2}, {-10, 3, -3}}
```

```
MatrixForm[B]
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \\ -10 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$-1 \times \det(B)$ にて行列式を計算してみる。（手計算の場合は「サラスの公式」などを用いる。）

```
- Det[B]
```

```
-69
```

一応、det(A) を直接計算して検算してみる。

```
Det[A]
```

```
-69
```

計算結果が一致した。

行列式の計算例 (2) 4 x 4 行列式（文字を含む式）

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{pmatrix}$$

に対し det(A) を求める。

```
A = {{1 + a, 1, 1, 1}, {1, 1 + b, 1, 1}, {1, 1, 1 + c, 1}, {1, 1, 1, 1 + d}}
```

```
{{1 + a, 1, 1, 1}, {1, 1 + b, 1, 1}, {1, 1, 1 + c, 1}, {1, 1, 1, 1 + d}}
```

```
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{pmatrix}$$

まず第1列で行消去を行う。
第1列に値が1の成分があれば、第1行に移動させる。その方が行消去の計算が易しいだろう。
今回は、第1行と第2行を交換する。この際、行列式が –1 倍されることに注意する。

```
Q1 = exchangeRows[4, 1, 2]
```

```
{{0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

```
MatrixForm[Q1]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q1 を A の左側からかける。計算結果を A1 とおく。

```
A1 = Q1.A
```

```
{{1, 1 + b, 1, 1}, {1 + a, 1, 1, 1}, {1, 1, 1 + c, 1}, {1, 1, 1, 1 + d}}
```

```
MatrixForm[A1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{pmatrix}$$

以後、(1,1) 成分を用いて (2,1), (3,1), (4,1) 成分を消去する。
第2行に第1行の $-(1+a)$ 倍を加える基本行列を Q2 とおく。

```
Q2 = rowAdd[4, 2, 1, -(1 + a)]
```

```
{{1, 0, 0, 0}, {-1 - a, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

```
MatrixForm[Q2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1-a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q2 を A1 の左側からかける。計算結果を A2 とおく。

```
A2 = Q2.A1
```

{{1, 1 + b, 1, 1}, {0, 1 + (-1 - a) (1 + b), -a, -a}, {1, 1, 1 + c, 1}, {1, 1, 1, 1 + d}}

```
MatrixForm[A2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 0 & 1+(-1-a)(1+b) & -a & -a \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{pmatrix}$$

Expand 関数で行列の各成分の式を展開する。

```
A2 = Expand[A2]
```

{{1, 1 + b, 1, 1}, {0, -a - b - a b, -a, -a}, {1, 1, 1 + c, 1}, {1, 1, 1, 1 + d}}

```
MatrixForm[A2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 0 & -a-b-ab & -a & -a \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{pmatrix}$$

(2,1) 成分の消去が完了。
次に (3,1) 成分を消去する。
第3行に第1行の –1 倍を加える基本行列を Q3 とおく。

```
Q3 = rowAdd[4, 3, 1, -1]
```

{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {-1, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

```
MatrixForm[Q3]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q3 を A2 の左側からかける。計算結果を A3 とおく。

```
A3 = Q3.A2
```

{{1, 1 + b, 1, 1}, {0, -a - b - a b, -a, -a}, {0, -b, c, 0}, {1, 1, 1, 1 + d}}

```
MatrixForm[A3]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 0 & -a-b-ab & -a & -a \\ 0 & -b & c & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{pmatrix}$$

(3,1) 成分の消去が完了。
次に (4,1) 成分を消去する。
第4行に第1行の –1 倍を加える基本行列を Q4 とおく。

```
Q4 = rowAdd[4, 4, 1, -1]
```

{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {-1, 0, 0, 1}}

```
MatrixForm[Q4]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q4 を A3 の左側からかける。計算結果を A4 とおく。

```
A4 = Q4.A3
```

{{1, 1 + b, 1, 1}, {0, -a - b - a b, -a, -a}, {0, -b, c, 0}, {0, -b, 0, d}}

```
MatrixForm[A4]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 0 & -a-b-ab & -a & -a \\ 0 & -b & c & 0 \\ 0 & -b & 0 & d \end{pmatrix}$$

(4,1) 成分の消去が完了。

以上より $\det(A) = -1 \times \det \begin{pmatrix} -a-b-\mathrm{ab} & -a & -a \\ -b & c & 0 \\ -b & 0 & d \end{pmatrix}$ となる。

右下のブロックを B とおく。

```
B = {{-a - b - a b, -a, -a}, {-b, c, 0}, {-b, 0, d}}
```

{{-a - b - a b, -a, -a}, {-b, c, 0}, {-b, 0, d}}

```
MatrixForm[B]
```

$$\begin{pmatrix} -a-b-ab & -a & -a \\ -b & c & 0 \\ -b & 0 & d \end{pmatrix}$$

$-1\times \det(B)$ にて行列式を計算してみる。（手計算の場合は「サラスの公式」などを用いる。）

```
- Det[B]
```

a b c + a b d + a c d + b c d + a b c d

一応、det(A) を直接計算して検算してみる。

```
Det[A]
```

a b c + a b d + a c d + b c d + a b c d

```
Det[A] - (-Det[B])
```

0

計算結果が一致した。