NO. 1
DATE 4 14 2013

線形代数 I (2013)

4/16

数学での議論の進め方

… チェス, 将棋, オセロなどのようなゲームの分析の進め方に対応しているとも見ることができるでしょう.

数学		ゲーム
定義	⟺	ゲームのルール
定理	⟺	ある盤面(が存在すること)
定理の証明 (定義や、それまでに示された定理を用いて示す)	⟺	ゲームの初期配置からある盤面に到達できることの証明 (それまでに到達できた盤面から、ルールに従った「手」の組み合わせを用いて示す)
定理を証明することによってわかる, 対象がもつ性質	⟺	「手」の組み合わせによってわかる, 各盤面がもつ性質

春学期の内容

- 第1章 : 数ベクトルと行列 … これから使う道具の準備 (　　, 数ベクトル, 行列)
- 第2章 : 連立1次方程式と行列 … 連立1次方程式を行列を使って解く (ガウスの消去法)
- 第3章 : 行列式
- 第4章 : 行列式の発展

} 「行列式」の定義、性質, 効能.

- 第5章 : 数ベクトル空間と線形写像 … 数ベクトル空間の性質. 「線形写像」と行列の関係.

KOKUYO

第1章：数ベクトルと行列．

本節では一度幾何学的な直観を忘れて記号として扱う意識で学ぶ.

§1.1 平面ベクトルのスカラー倍と和

ここから先は実数に関するいろいろな性質を用いる.

<u>定義</u> (平面ベクトル)

矢を入れる
太字．$\boldsymbol{x}$

$\mathbb{R}$：実数全体の集合．

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ に対し．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を <u>平面ベクトル</u> という．

x_1, x_2 を <u>$\boldsymbol{x}$ の成分</u> という．

平面ベクトル全体 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ を $\mathbb{R}^2$ で表す．

(以後「平面」と略すことがある.) $\blacksquare$

<u>定義</u> (ベクトルの相等)．

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し．

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が等しい $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x_1 = y_1$ かつ $x_2 = y_2$.

このとき．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ で表す． $\blacksquare$

<u>定義</u> (ベクトルのスカラー倍)

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し． $c \in \mathbb{R}$ をスカラーと呼ぶ．

(ベクトルの係数となるもの．ここでは実数)

上の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, c に対し．ベクトル $\begin{pmatrix} c x_1 \\ c x_2 \end{pmatrix}$ を

$\boldsymbol{x}$ の <u>スカラー倍</u> (c 倍) と呼び． $c\boldsymbol{x}$ で表す．

特に $(-1)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ を $-\boldsymbol{x}$ で表す． $\blacksquare$

定義 (ベクトルの和)

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し. $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ を

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

で定める. 特に $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$ を $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ で表す. ▨

定義 (ゼロベクトル)

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を <u>ゼロベクトル</u> と呼び, $\mathbb{0}$ で表す. ▨

命題 すべてのベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し.

$\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbb{0}$ が成り立つ.

(Proof) ベクトルの和の定義より

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x - x \\ x - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0}.$$

▨

ここで実数の性質を用いていることに注意!

定義 (基本ベクトル)

$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を <u>基本ベクトル</u> という. ▨

定義 (線形結合)

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^2$.

$c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$. のとき. ベクトル

$$c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_r \mathbf{a}_r$$

を. $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ の <u>線形結合</u> または <u>1次結合</u> という. ▨

skip

問題 1.1 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

このとき.

$$
\begin{aligned}
2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 &= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-6 \\ 4+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Cont.

命題 任意の平面ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は.
基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の線形結合で表すことができる.

Proof

Point $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の線形結合は

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす c_1, c_2 の値を決める!

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2
\end{aligned}
$$

により. $\mathbf{x}$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の線形結合で表すことができる. ∎

4/16

KOKUYO