4/19

任意の平面ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を線形結合で表すことができるようなベクトルの組は他にもあるか？

⇒ ある！

例題. $\underbrace{f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ の線形結合で表されることを示せ.

任意の平面ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は

こたえ) 方針 基本ベクトル e_1, e_2 が f_1, f_2 の線形結合で表されることを示せばよい.

skip

$$f_2 - f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1, \quad f_1 + f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2e_2 \text{ より}$$

$$e_1 = \frac{1}{2}(f_2 - f_1), \quad e_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= x_1 e_1 + x_2 e_2 \\ &= x_1 \cdot \frac{1}{2}(f_2 - f_1) + x_2 \cdot \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \\ &= \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) f_1 + \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) f_2. \end{aligned}$$

□

では、「任意の平面ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を線形結合で $\boxed{\text{一意的に}}$ 表すことができるようなベクトルの組」はどのようなものか？

定義（生成，「張る」）

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^2$.

任意の平面ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ が $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ の線形結合で表されるとき．

「$\mathbb{R}^2$ は $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ で $\left\{ \begin{array}{l} \text{生成される} \\ \text{張られる} \end{array} \right\}$」，

「$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は $\mathbb{R}^2$ を $\left\{ \begin{array}{l} \text{生成する} \\ \text{張る} \end{array} \right\}$」という．

skip

では，「任意の平面ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を線形結合で $\boxed{\text{一意的に}}$ 表すことができるようなベクトルの組」は

どのようなものか？ ⟶ 一意的でない例？

$\boxed{\text{一意的}}$ … 数学では重要な概念の一つ．
unique

- 連立方程式の解は ただ一つ存在するか？
  無数に存在するか？
  存在しないか？

- ある対象と別の対象の間に 1対1 の対応がとれるか？

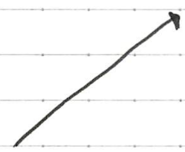
⟹ 数学で研究の対象としているものの構造を見極める上で重要な性質の一つ．

この部分，p.10 の後へ（もう一度書く）

これから「線形結合の一意性」を調べるが，そのためには
ここで，幾何学的なベクトルの意味を直観的にとらえることが
頭の中でベクトルをイメージする助けになるだろう．というわけで．
ここで，一度「§1.2 平面ベクトルの幾何的な意味」に
進みます．

ここで、
（教科書 p.3, 問題 1.2 の下から p.5, §1.2 に飛ぶ）

§1.2. 平面ベクトルの幾何的な意味.

これまで、  を ベクトルとみなして使ってきたと思うが.

よく考えてみると、 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ と  は別のもので.

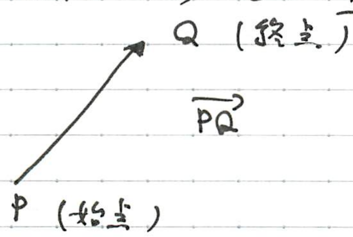
数を2つ並べてカッコで囲ったもの.

平面上の矢印

それらを結びつけるには何らかの定義が必要である.
そこで、これまで「何となく」扱ってきた、ベクトルと矢印の対応を明確に定義する.

定義（有向線分）

平面上に2点 P, Q をとり. P を始点, Q を終点として矢印を結んだものを 有向線分 といい, $\overrightarrow{PQ}$ で表す.



（教科書 p.5, 図1.1）

▨

定義（有向線分の相等）

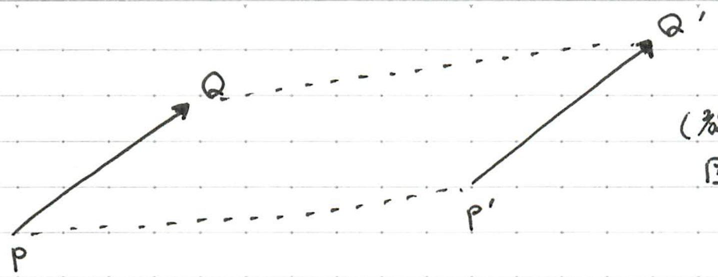
2つの有向線分 $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{P'Q'}$ が等しい

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\overrightarrow{P'Q'}$ を平行移動して $\overrightarrow{PQ}$ の上に重ねることが可能

$\Longleftrightarrow$ 四角形 PQQ'P' が平行四辺形をなす.

NO. 8

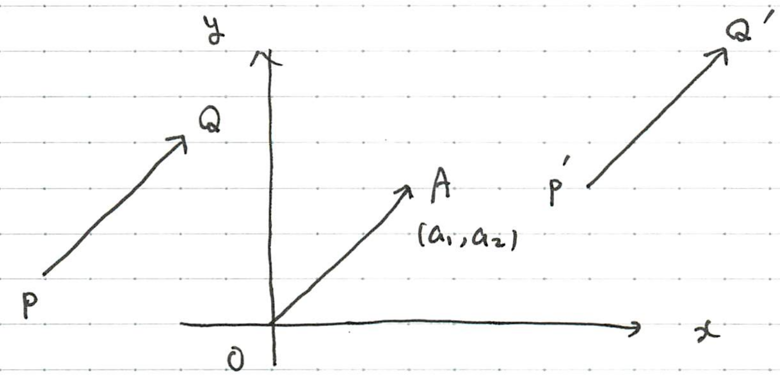
DATE 4 18 2013



(教科書 p. 6 図 1.2)

定義 (有向線分と平面ベクトルの対応づけ)

平面に (x, y) 座標を定める。
有向線分 $\overrightarrow{PQ}$ と等しいものの中で、原点 $O = (0, 0)$ を始点とするものを $\overrightarrow{OA}$ とする。
点 A の座標が (a_1, a_2) のとき、平面ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{OA}$ を対応づけ。 $\underline{\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}}$ で表す。
同様にして、$\overrightarrow{OA}$ と等しい有向線分すべてを $\mathbf{a}$ と対応づけ。 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ} = \cdots$ で表す。



(教科書 p. 6 図 1.3)

① $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{OA}$ (有向線分として)
② 点 A の座標が (a_1, a_2) のとき、$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA}$ とする。
③ さらに $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ とする。

定義 (位置ベクトル)

平面上の点 A の座標を (a_1, a_2) とするとき、有向線分 $\overrightarrow{OA}$ に対して平面ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ が対応づけられる。
このとき、$\mathbf{a}$ を点 A の <u>位置ベクトル</u> という。

KOKUYO

定義 (ベクトルの長さ)

平面ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ の長さを $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ で定め、
これを $\|\mathbb{a}\|$ で表す。 ▨

命題 平面ベクトル $\mathbb{a}$ の長さは、$\mathbb{a}$ に対応する有向線分の長さに等しい。

(Proof) $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ とし、$\mathbb{a}$ に対応する有向線分で skip
始点が原点にあるものを $\overrightarrow{OA}$ とすると、点 A の座標は (a_1, a_2)。よって $\overrightarrow{OA}$ の長さは、ピタゴラスの三平方の定理より $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ であり、$\|\mathbb{a}\|$ に等しい。 ▨

▨ 平面ベクトルのスカラー倍と和の幾何的な意味。

(1) スカラー倍。

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA}$$ (始点が原点にある有向線分)
以下同様。

のとき、$c \in \mathbb{R}$ に対し、

$$c\mathbb{a} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \end{pmatrix}, \quad \|c\mathbb{a}\| = \sqrt{c^2a_1^2 + c^2a_2^2} = |c| \cdot \|\mathbb{a}\|$$

対応する有向線分は
- 長さ $|c|$ 倍。
- 向き $\begin{cases} \overrightarrow{OA} \text{ と同じ向き} & (c>0) \\ \text{なし} & (c=0) \\ \overrightarrow{OA} \text{ と逆向き} & (c<0) \end{cases}$

(2) 和。

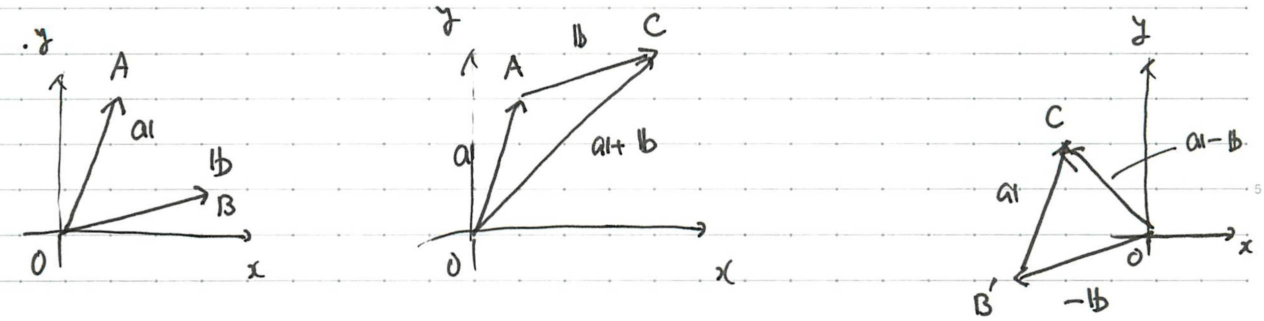
① $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$ skip

のとき、$\mathbb{a} + \mathbb{b} = \overrightarrow{OC}$。

② $\mathbb{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{B'C}$, $\mathbb{b} = \overrightarrow{OB}$, $-\mathbb{b} = \overrightarrow{OB'}$ のとき。

$$\mathbb{a} - \mathbb{b} = \overrightarrow{OC}.$$

① $\mathbb{a}+\mathbb{b}$　　② $\mathbb{a}-\mathbb{b}$.

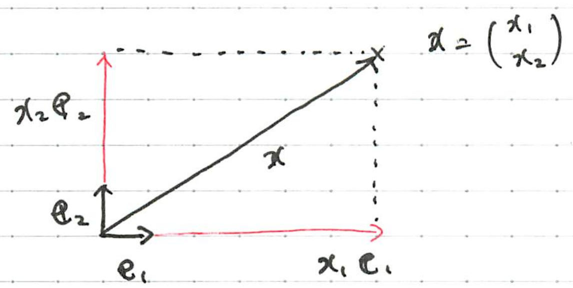


(教科書 p.8, 図 1.6 + α)

(教科書 p.8, 問題 1.4 まで来たところで.
教科書 p.8, $\mathbb{R}^2$の生成(張る)の定義に戻る.

例「$\mathbb{R}^2$は基本ベクトル $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2$ で生成される(張られる)」の幾何的な意味.

$\mathbb{R}^2$の任意の平面ベクトル $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が、$\mathbb{e}_1$と$\mathbb{e}_2$の線形結合で表される.



左図のように表される $\mathbb{x}$ 全体が、平面全体を $\underbrace{\text{平面全体}}_{\mathbb{R}^2\text{に対応する}}$ 構成する.

⇒ ちょうど、$\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2$が張っているような2本の直線を骨組として、紙(フィルムや障子などを想像してもよい)を張っているように見えませんか!?

4/19