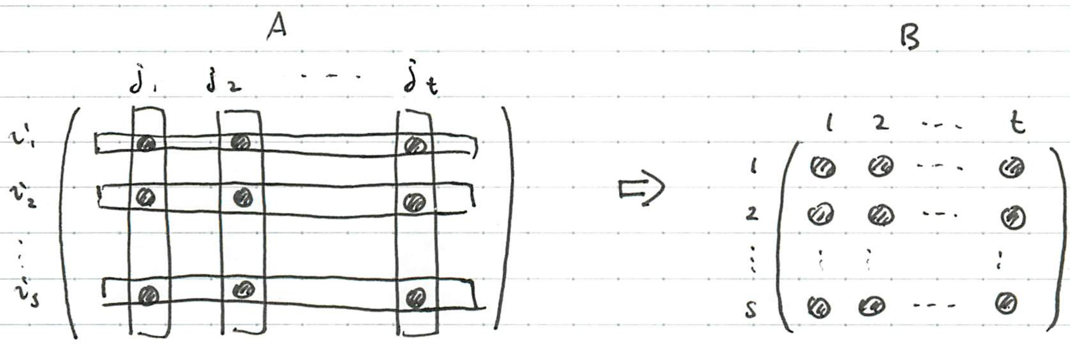
3/9

§3.4.1 小行列と余因子展開.

定義 ($s \times t$ 小行列)

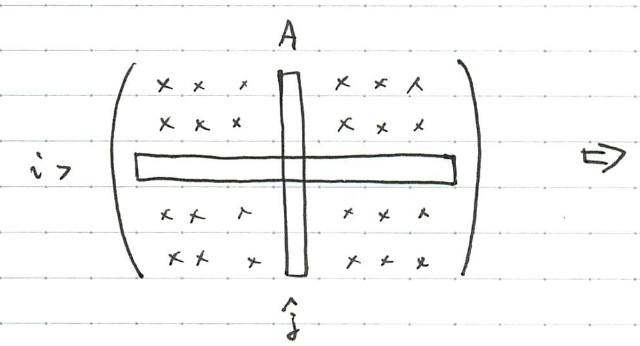
$A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, $0 \leq s \leq m$, $0 \leq t \leq n$ に対し, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq m$ および $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leq m$ を定める.

このとき, $B = (b_{hk}) = (a_{i_h, j_k})$ で定める行列 B を A の $s \times t$ 小行列 とよぶ. ($m \times n$ 小行列は A そのものを表す.)



$$b_{h,k} = a_{i_h, j_k}$$ □

注意 $A \in K^{n \times n}$ に対し, $(n-1) \times (n-1)$ 小行列の定め方は n^2 通り.



Aの第i行および第j列のみを除いた $(n-1) \times (n-1)$ 小行列.

一般に, (n_1, n_2) 行列から $(m_1 \times m_2)$ 小行列を取る取り方は

$$\binom{n_1}{m_1} \times \binom{n_2}{m_2} \text{ 通り.}$$

ここで $\binom{n}{m} = {}_nC_m = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 1}$. (二項係数). □

定義 (余因子) $A \in K^{n\times n}$.
$A_{ij} \overset{\text{def}}{\iff} A$ から第 i 行と第 j 列を除いて得られる $(n-1)\times(n-1)$ 小行列.
このとき, $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ を A の (i,j) 余因子という. ☒

定理 3.18 (余因子展開) $A \in K^{n\times n}$, A_{ij}: A の (i,j) 余因子. $1 \le p \le n$ のとき.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{p+j} a_{pj} |A_{pj}|.$$

(A の第 p 行に関する余因子展開).

(Proof) $|A|$ の第 p 行を (p,j) 成分毎の和に分解すると行列式の多重線形性の定理 (ノート p.106) より

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p-1,1} & \cdots & & a_{p-1,n} \\ a_{p1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{p+1,1} & \cdots & & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{p-1,1} & & & & a_{p-1,n} \\ 0 & a_{p,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{p+1,1} & & \cdots & & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p-1,1} & & \cdots & a_{p-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p,n} \\ a_{p+1,1} & & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

(1) の右辺の第 j 項について, 第 j 列の第 p 行以外の成分を a_{pj} で消去できる. このとき, 第 p 行は

$$(0 \cdots 0 \ a_{p,j} \ 0 \cdots 0)$$

であり, 第 j 列以外の成分は 0 であるので, 行消去後の第 1, …, $p-1$, $p+1$, …, n 行の第 j 列以外の成分は変化しない. よって

$$
|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{p-1,2} & \cdots & a_{p-1,n} \\ a_{p1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{p+1,2} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p-1,1} & 0 & a_{p-1,3} & & a_{p-1,n} \\ 0 & a_{p,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{p+1,1} & 0 & a_{p+1,3} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots
$$

$$
\cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p-1,1} & \cdots & a_{p-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{pn} \\ a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix} . \qquad (2)
$$

(2)の右辺の各項について、「第p行と第p−1行」,「第p−1行と第p−2行」,…,「第1行と第2行」の順に計p−1回の行交換を行うと

$$
|A| = (-1)^{p-1} \begin{vmatrix} a_{p1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{p-1,2} & \cdots & a_{p-1,n} \\ 0 & a_{p+1,2} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{p-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{p,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p-1,1} & 0 & a_{p-1,3} & \cdots & a_{p-1,n} \\ a_{p+1,1} & 0 & a_{p+1,3} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots
$$

$$
\cdots + (-1)^{p-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{pn} \\ a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p-1,1} & \cdots & a_{p-1,n-1} & 0 \\ a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix} . \qquad (3)
$$

(3)の右辺の第j項について、「第j列と第j−1列」,「第j−1列と第j−2列」,…,「第1列と第2列」の順に、計j−1回の列交換を行うと

$$|A| = (-1)^{p-1+1-1} \begin{vmatrix} a_{p1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{p-1,2} & \cdots & a_{p-1,n} \\ 0 & a_{p+1,2} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{p-1+2-1} \begin{vmatrix} a_{p,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{p-1,1} & a_{p-1,3} & \cdots & a_{p-1,n} \\ 0 & a_{p+1,1} & a_{p+1,3} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{p-1+n-1} \begin{vmatrix} a_{p,n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{p-1,1} & \cdots & a_{p-1,n-1} \\ 0 & a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} . \qquad (4)$$

(4)の右辺の第j項に現われる行列式はAの(p,j)余因子$|A_{pj}|$に等しいので、命題1（ノート p.100）より

$$|A| = (-1)^{p+1} a_{p1} |A_{p1}| + (-1)^{p+2} a_{p2} |A_{p2}| + \cdots + (-1)^{p+n} a_{pn} |A_{pn}|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{p+j} a_{pj} |A_{pj}| .$$

よって定理の主張が示された。 ∎

系（Aの第p列に関する余因子展開）.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{ip} |A_{ip}| .$$

∎

定理 3.19 (余因子積). $A \in K^{n\times n}$, $1 \le i, j \le n$ のとき.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}|A_{jk}| = \delta_{ij}|A|$.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki}(-1)^{j+k}|A_{kj}| = \delta_{ij}|A|$.

Proof (1) $i=j$ のときは 定理3.18の 余因子展開に等しい.
$i\neq j$ のときは. 定理 3.18 の 証明の 式 (1) の展開で 考えると.

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,n} \\
a_{i,1} & 0 \cdots & 0 \\
a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} & & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j-1,1} & & a_{j-1,n} \\
0 & a_{i,2} \; 0 \cdots & 0 \\
a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+ \cdots
$$

$$
\cdots +
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,n} \\
0 & \cdots \; 0 & a_{i,n} \\
a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

を表す. これは. Aの第j行をAの第i行で置き換えた行列

$$
B = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ <i \\ \\ <j \\ \\ \\
\end{array}
$$

の行列式 $|B|$ を表す. 定理3.11 (1) より $|B| = 0$.
(2) は (1) と同様で. 列に関する余因子展開である. ☒

定義 (余因子行列)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$, $\tilde{A}_{ij}$: A の (i,j) 余因子 $= (-1)^{i+j}|A_{ij}|$

このとき, n次正方行列

$$\tilde{A} = (\tilde{A}_{ji}) = {}^t(\tilde{A}_{ij}) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \cdots & \tilde{A}_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{1n} & \tilde{A}_{2n} & \cdots & \tilde{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

を **Aの余因子行列** という.

$\tilde{A}_{ij}$ の転置を並べる点に注意!

定理 3.20 (余因子行列から導かれる逆行列)

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E_n.$$

特に $|A| \neq 0$ ならば $\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$ が A の逆行列を与える.

Proof (1) $A\tilde{A} = |A|E_n$.

$B = (b_{ij}) = A\tilde{A}$ とおく.

余因子行列の定義より, $B = A\tilde{A}$ の (i,j) 成分は

$$b_{ij} = a_{i1}\tilde{A}_{j1} + a_{i2}\tilde{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\tilde{A}_{jn}.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{A}_{jk}.$$

これは定理 3.19 : 余因子展開の (1) に等しい. よって

$$b_{ij} = \begin{cases} |A| & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases},$$

ゆえに $B = A\tilde{A} = |A|E_n$.

(2) $\tilde{A}A = |A|E_n$.

$C = (c_{ij}) = \tilde{A}A$ とおく. (1)と同様にして $C = \tilde{A}A$ の (i,j) 成分は

$$c_{ij} = \tilde{A}_{1i}\, a_{1j} + \tilde{A}_{2i}\, a_{2j} + \cdots + \tilde{A}_{ni}\, a_{nj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, \tilde{A}_{ki}.$$

これは定理3.19：余因子展開の(2)に等しい。よって

$$c_{ij} = \begin{cases} |A| & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

ゆえに $C = \tilde{A} A = |A| E_n$. $\blacksquare$

例　高校数学で習った2次正方行列の逆行列の公式は定理3.20に基づく。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,　$|A| = ad - bc \neq 0$ のとき、

$$\begin{cases} \tilde{A}_{11} = (-1)^{1+1} |A_{11}| = d, \\ \tilde{A}_{12} = (-1)^{1+2} |A_{12}| = -c, \\ \tilde{A}_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = -b, \\ \tilde{A}_{22} = (-1)^{2+2} |A_{22}| = a \end{cases}$$

より　$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \tilde{A} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. $\blacksquare$

§3.5 よくでてくる行列式の例。

定理 3.21　(ファンデルモンド (Vandermonde) の行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

(Proof) 求める行列式を $A(x_1,\cdots,x_n)$ とおく. 帰納法により示す.

① $A(\ ) = |1| = 1$.

② $n-1$ 次まで定理が成り立つと仮定する. このとき.

$$A(x_1,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \downarrow\times(-1)\ \downarrow\times(-1)\ \cdots\ \downarrow\times(-1)$$

第2,…,n行に第1行の−1倍を加えると

$$A(x_1,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$\xrightarrow{\times(-x_1)}$ $\cdots$ $\xrightarrow{\times(-x_1)}$

$j=2,\cdots,n$ に対し, 第 j 列に第 $j-1$ 列の $-x_1$ 倍を加えると

$$A(x_1,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_2^2-x_2x_1 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \\ x_n-x_1 & x_n^2-x_nx_1 & \cdots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-x_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot A(x_2, \ldots, x_n)$$

$$= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

となり、n 次の場合にも成り立つ。

以上より定理の主張が示された。 ▨

★ ファンデルモンドについて

出典：MacTutor History of Mathematics
(School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland)
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Vandermonde.html

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)(仏)

- 最初は音楽家（ヴァイオリン奏者）で数学に転じたのは35歳になってから。
- 「ファンデルモンドの行列式」は不思議なことに彼の論文には見られない。
  （後年、ルベーグ（「ルベーグ積分」の創始者）が〔推測した〕「誰かがファンデルモンドの記法を行列式と誤解したのが広まったのだろう」という説が現在では信じられている。）