注意 「重複も込めて」の意味(例):

方程式 $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ は 根 $x=\underbrace{1,\ 1}_{2つと数える}$ をもつ。 □

★ さて、αを $A\in K^{n\times n}$ の固有値とすると

$$\Phi_A(\alpha)=|\alpha E_n-A|=0$$

定理3.16 (教科書 p.83, ノート p.110)

$\iff |A-\alpha E_n|=0$

$\iff$ 行列 $A-\alpha E_n$ は正則でない

系2.12 (教科書 p.52, ノート p.76)

$\iff \mathrm{rank}\,(A-\alpha E_n)<n$

定理3.17 (教科書 p.83, ノート p.110)

$\iff (A-\alpha E_n)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ (斉次連立1次方程式)
が非自明解 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ をもつ。

定理2.17 (教科書 p.53, ノート p.80

$\iff A\boldsymbol{v}=\alpha E_n\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{v}.$

ベクトルに行列をかけたものがベクトルの定数倍に等しい ⟶ $\boldsymbol{v}$は固有値αに付随する「特別な」ベクトル.

7/16

定義 4.3 (固有ベクトル) $A\in K^{n\times n}$, α : Aの固有値.

$$(A-\alpha E_n)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\iff A\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$$

をみたすベクトル $\boldsymbol{v}$ を <u>固有値αに属するAの固有ベクトル</u> と呼ぶ。 □

§4.4 クラメールの公式

定理 4.4 (クラメール (Cramér) の公式)

連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n), \quad \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}.$$

に対し、A が正則のとき、その解は

$$x_i = \frac{|\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n|}{|A|} \quad \cdots (1)$$

で与えられる。

Proof 連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$ と表される。

行列式の多重線形性より

$$\begin{aligned}
&\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\
&= \det\left(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\
&= x_i \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\
&= x_i |A|.
\end{aligned}$$

ゆえに (1) が導かれる。 ▨

第5章 数ベクトル空間と線形写像

§5.0 数ベクトル空間と部分空間.

◎はじめに.

- これまでの授業では,「行列」を中心に扱ってきた.
  - 行列の性質 (第1章)
  - 連立1次方程式の係数行列 (第2章)
  - 行列式 (第3章, 第4章)
- これからの授業では「ベクトル」を中心に扱う!
- 行列の位置づけ: ベクトルをベクトルに移す「写像」(線形写像) としての性質を中心に扱う.

◎数ベクトル空間.

- K上n項数ベクトル空間 (教科書 p.13)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \,\middle|\, a_1, \dots, a_n \in K \right\}.$$

数ベクトル空間 = 数ベクトルの集合 + $\boxed{\text{構造}}$

- 単なるベクトルの集まりでは「空間」とは呼ばない.
「空間」は,ベクトルの集まりにある構造を導入したもの.

◎では「構造」とは?

- 数学一般では,対象とする集合の元の間に何らかの関係(演算や関係式(大小関係など))を定める.
- 数ベクトル空間では「和」と「スカラー倍」.

◎数ベクトル空間の和とスカラー倍.

- 和とスカラー倍の定義: 教科書 p.13参照.
  - 和とスカラー倍は,Vの中で閉じた演算であることに注意. ノート p.25
- 教科書 p.14の性質 (A1),…,(A4), (S1),…,(S4) は「p.13の和とスカラー倍がみたす性質」と書かれているが,実際12は,(A1),…,(A4),

(続く)

(S1), …, (S4) をみたすように 和 と スカラー倍 を 定義 した. というものである.

⑪ 数ベクトル空間のまとめ

- これからの授業では「ベクトル」を中心に扱う.
- 数ベクトル空間は, 数ベクトルの集まりに「和」と「スカラー倍」の演算(構造)を加えたもの.
- 「和」と「スカラー倍」は 与えられた 空間内で 閉じている.
- 〃 〃 , (A1), …, (A4), (S1), …, (S4) をみたすように作られたものである.

(数)ベクトル空間の「公理」と 呼ばれる.

⑫ 部分空間.

定義 (部分空間) V: 数ベクトル空間. $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. のとき,

W は V の 部分空間 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(SS1) $\forall x, y \in W$ に対し, $x + y \in W$.

(SS2) $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in W$ に対し, $\lambda x \in W$.

subspace

V で与えられた 和 と スカラー倍 が… W の中で 閉じている.

V の和とスカラー倍を W に制限することにより, W も 数ベクトル空間 になる.

(公理 (A1), …, (A4), (S1), …, (S4) をみたす)

(例) 部分空間の例 :

① V 自体は V の部分空間. ③ $\mathbb{R}^2 \subsetneq \mathbb{R}^3$.